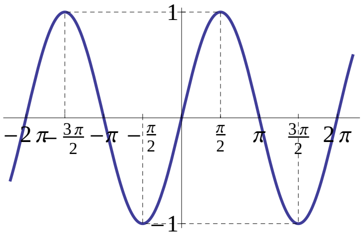
# 数学I　第13回　微分の応用I

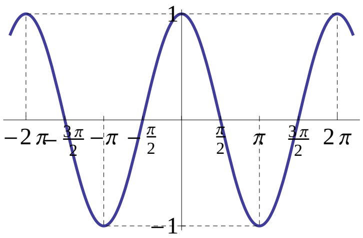
2015年7月8日　担当：佐藤 純

**問題 1** 以下の関数のグラフを描け.

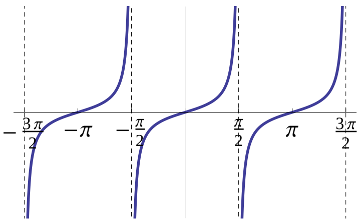
**(1-1)** $y = \sin x$



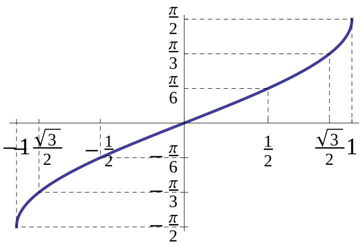

**(1-2)** $y = \cos x$



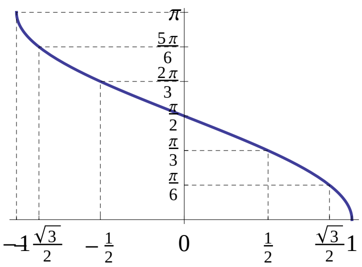

**(1-3)** $y = \tan x$



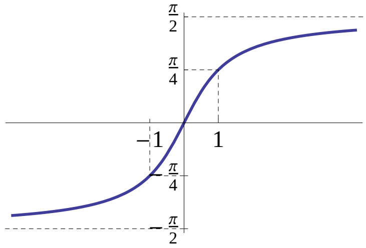

**(1-4)** $y = \sin^{-1} x$
$(-1 \leq x \leq 1,\ -\pi/2 \leq y \leq \pi/2)$



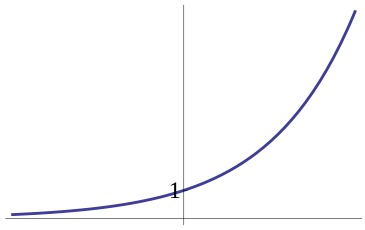

**(1-5)** $y = \cos^{-1} x$
$(-1 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq \pi)$



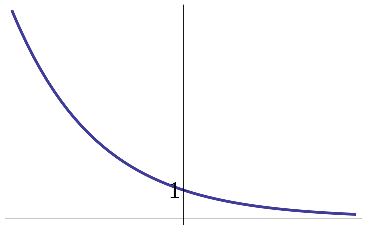

**(1-6)** $y = \tan^{-1} x$
$(-\infty < x < \infty,\ -\pi/2 < y < \pi/2)$



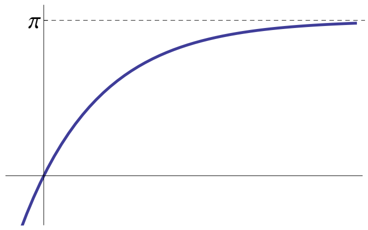

**(1-7)** $y = e^x$



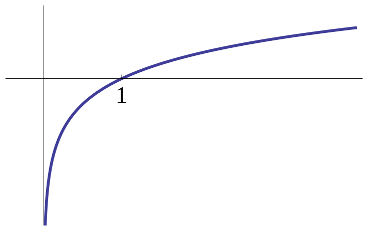

**(1-8)** $y = e^{-x}$



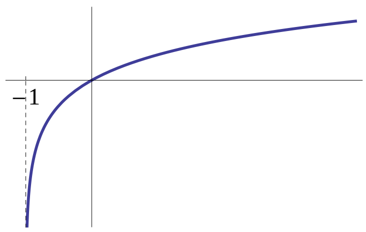

**(1-9)** $y = \pi(1 - e^{-x})$




**(1-10)** $y = \log x$




**(1-11)** $y = \log(1 + x)$

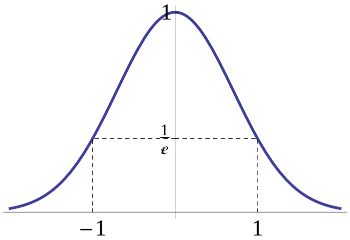


**問題 2** 以下の関数のグラフを描け．極大極小点がある場合は，その座標も書き込むこと．

**(2-1)** $y = e^{-x^2}$

$f(-\infty) = f(+\infty) = 0,\ f(0) = 1$

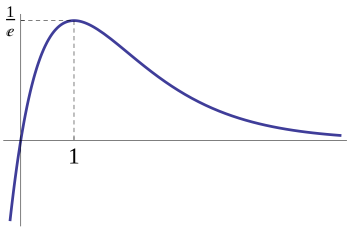
| $x$ | $\sim$ | $0$ | $\sim$ |
|---|---|---|---|
| $f'$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ |




**(2-2)** $y = xe^{-x}$

$f(-\infty) = -\infty,\ f(+\infty) = 0,\ f(0) = 0$

| $x$ | $\sim$ | $1$ | $\sim$ |
|---|---|---|---|
| $f'$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f$ | $\nearrow$ | $1/e$ | $\searrow$ |




**(2-3)** $y = e^{-x} - e^{-2x}$

$f(-\infty) = -\infty,\ f(+\infty) = 0,\ f(0) = 0$

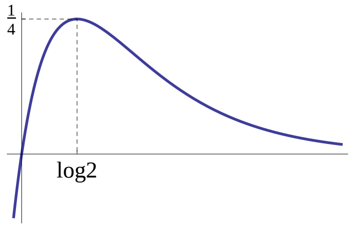
| $x$ | $\sim$ | $\log 2$ | $\sim$ |
|---|---|---|---|
| $f'$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f$ | $\nearrow$ | $1/4$ | $\searrow$ |

$f'(x) = -e^{-x} + 2e^{-2x} = e^{-x}(2e^{-x} - 1) = 0$ を解くと，

$e^{-x} = \dfrac{1}{2},$

$-x = \log \dfrac{1}{2} = -\log 2,$

$x = \log 2.$




**(2-4)** $y = x^{\frac{1}{x}}\ (x > 0)$

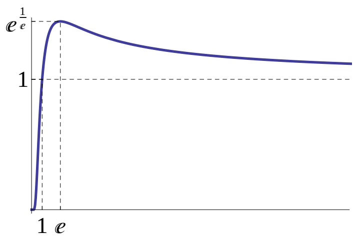
$f(x) = x^{\frac{1}{x}}, \quad g(x) = \log f(x) = \dfrac{\log x}{x}.$

$g(+0) = -\infty,\ g(+\infty) = 0,\ g(1) = 0$

| $x$ | $\sim$ | $e$ | $\sim$ |
|---|---|---|---|
| $g'$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $g$ | $\nearrow$ | $1/e$ | $\searrow$ |

$f(+0) = e^{-\infty} = 0,\ f(+\infty) = e^0 = 1,\ f(1) = e^0 = 1$

| $x$ | $\sim$ | $e$ | $\sim$ |
|---|---|---|---|
| $f'$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f$ | $\nearrow$ | $e^{1/e}$ | $\searrow$ |




**問題 3**

**(3-1)** 不等式 $\sin x \geq x - \dfrac{x^2}{\pi}$ が成り立つことを示せ．

関数 $f(x)$ を $f(x) = \sin x - x + \dfrac{x^2}{\pi}$ で定める．$f(x) \geq 0$ を示せばよい．微分を順に計算すると，

$$f'(x) = \cos x - 1 + \frac{2}{\pi}x,$$

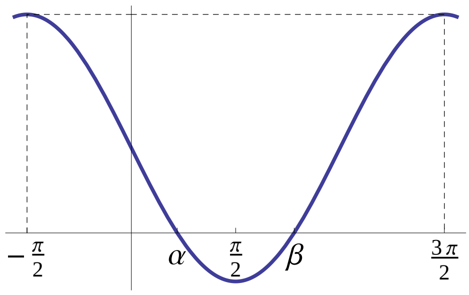
$$f''(x) = -\sin x + \frac{2}{\pi}.$$

まず，$f''(x)$ について調べると，

| $x$ | $-\pi/2$ | $\sim$ | $\alpha$ | $\sim$ | $\beta$ | $3\pi/2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f''$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |

となる．ただし，$\alpha$ と $\beta$ は $\sin\alpha = \sin\beta = 2/\pi$, $0 < \alpha < \pi/2$, $\pi/2 < \beta < \pi$ を満たす角度とする．

$f''(x)$

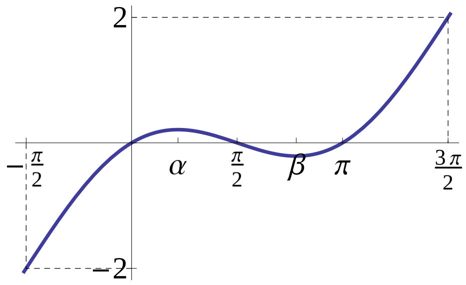



次に，$f'(x)$ について調べる．$f'(0) = f'(\pi/2) = f'(\pi) = 0$ より，

| $x$ | $-\pi/2$ | $\sim$ | $0$ | $\sim$ | $\alpha$ | $\sim$ | $\pi/2$ | $\sim$ | $\beta$ | $\sim$ | $\pi$ | $\sim$ | $3\pi/2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f''$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $f'$ | $-2$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | $2$ |

となる．

$f'(x)$

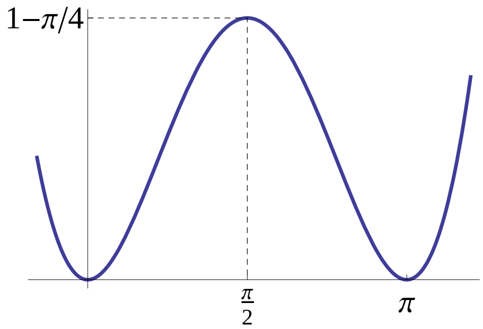



以上より，$f(x)$ の増減表とグラフを描くと，

| $x$ | $\sim$ | $0$ | $\sim$ | $\pi/2$ | $\sim$ | $\pi$ | $\sim$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $1-\pi/4$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ |

となる．

$f(x)$




$x < -\pi/2$ および $x > 3\pi/2$ においては，$-x + x^2/\pi > 1$ なので，常に $f(x) > 0$ となる．以上により題意は示された．

**(3-2)** 方程式 $\quad \sin x = x - \dfrac{x^2}{\pi} \quad$ の解を全て求めよ．

前問の結果より，$x = 0, \pi$ が全ての解である．

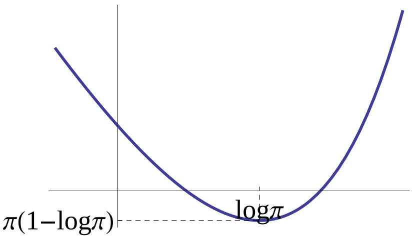
**問題 4** 方程式 $e^x = \pi x$ の実数解の個数を求めよ．

$f(x) = e^x - \pi x$ とする．

$f(-\infty) = +\infty,\ f(+\infty) = +\infty,\ f(0) = 1$

| $x$ | $\sim$ | $\log \pi$ | $\sim$ |
|---|---|---|---|
| $f'$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f$ | $\searrow$ | $\pi(1 - \log \pi)$ | $\nearrow$ |

$e < \pi$ より，$\log \pi > 1$ なので，$\pi(1 - \log \pi) < 0$ より，$f(x)$ のグラフは $x$ 軸と 2 点で交わるので，解の個数は 2 個．




**問題 5** $e^\pi$ と $\pi^e$ の大小関係を調べたい．ただし，$e = 2.71\cdots,\ \pi = 3.14\cdots$ である．

**(5-1)** $f(x) = x - e \log x\ \ (x > 0)$ のグラフを描き，$f(\pi) > 0$ を示せ．

$$\lim_{x \to +0} f(x) = +0 - e \times (-\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x \left(1 - e\frac{\log x}{x}\right)$$

ここで，

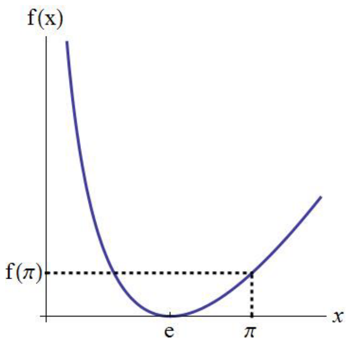
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log x}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

なので，

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \times (1 - 0) = +\infty$$

$f'(x) = 1 - \dfrac{e}{x}$ より，増減表を書くと，

| $x$ | $0$ | $\sim$ | $e$ | $\sim$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | ／ | $-$ | $0$ | $+$ | ／ |
| $f$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |




$f(e) = 0,\ x > e$ で $f'(x) > 0$ より，$x > e$ で $f(x) > 0$ である．

したがって，$\pi > e$ より，$f(\pi) > 0$.

**(5-2)** $e^\pi$ と $\pi^e$ の大小関係を決定せよ.

$f(\pi) = \pi - e\log\pi > 0$ より,

$\pi > e\log\pi$ である.

$\pi = \log e^\pi$, $e\log\pi = \log\pi^e$ より,

$\log e^\pi > \log\pi^e$ である.

$\log x$ は $x > 0$ で単調増加関数だから,

$\log e^\pi > \log\pi^e \iff e^\pi > \pi^e$ である.