数学I　第12回　関数の微分法II

2015年7月1日　担当：佐藤 純

問題1 以下で与えられた関数 y を x で微分し，y' を求めよ．

(1-1) $y = 3^x$

$$(3^x)' = y(\log y)' = 3^x(x\log 3)' = \boxed{3^x \log 3}$$

(1-2) $y = 2^x + \cos x$

$$(2^x + \cos x)' = 2^x(x\log 2)' - \sin x = \boxed{2^x \log 2 - \sin x}$$

(1-3) $y = \pi \sin x + \cos x$

$$(\pi \sin x + \cos x)' = \pi(\sin x)' + (\cos x)' = \boxed{\pi \cos x - \sin x}$$

(1-4) $y = e\log x - e$

$$y' = \boxed{\frac{e}{x}}$$

(1-5) $y = \log(2x)$

$$y' = (\log x + \log 2)' = \boxed{\frac{1}{x}}$$

(1-6) $y = \log_{10} x$

$$y' = \left(\frac{\log x}{\log 10}\right)' = \boxed{\frac{1}{x\log 10}}$$

(1-7) $y = \log x - \log \pi$

$$y' = \boxed{\frac{1}{x}}$$

(1-8) $y = x^2 \log 2$

$$y' = \boxed{2x\log 2}$$

(1-9) $y = x^2 \log x$

$$y' = (x^2)'\log x + x^2(\log x)' = \boxed{2x\log x + x}$$

(1-10) $y = \dfrac{\sin x}{e^x}$

$$y' = (e^{-x}\sin x)' = (e^{-x})'\sin x + e^{-x}(\sin x)' = -e^{-x}\sin x + e^{-x}\cos x = \boxed{e^{-x}(\cos x - \sin x)}$$

(1-11) $y = \dfrac{x+1}{x-1}$

$$y' = \left(1 + \frac{2}{x-1}\right)' = \left(\frac{2}{x-1}\right)' = \boxed{-\frac{2}{(x-1)^2}}$$

(1-12) $y = \dfrac{\log x}{x}$

$$y' = \frac{(\log x)' x - \log x (x)'}{x^2} = \boxed{\frac{1 - \log x}{x^2}}$$

$\boxed{\textbf{問題 2}}$ 以下で与えられた関数 $f(x)$ に対し，n 階の導関数 $f^{(n)}(x)$ が以下の式で与えられることを示せ.

(2-1) $f(x) = e^x, \quad f^{(n)}(x) = e^x \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$
$f'(x) = e^x, f''(x) = e^x, \cdots$ より明らか.

(2-2) $f(x) = \sin x, \quad f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$

- $n = 0$ のときは成り立っている.
- $n = k$ のとき成り立っていると仮定すると，

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= \left\{f^{(k)}(x)\right\}' = \left\{\sin\left(x + \frac{k\pi}{2}\right)\right\}' = \cos\left(x + \frac{k\pi}{2}\right) = \sin\left[\left(x + \frac{k\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right] \\ &= \sin\left(x + \frac{(k+1)\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

  より，$n = k + 1$ でも成り立っている.
- 以上より，$n = 0, 1, 2, \cdots$ で成り立っている.

(2-3) $f(x) = \cos x, \quad f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$

- $n = 0$ のときは成り立っている.
- $n = k$ のとき成り立っていると仮定すると，

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= \left\{f^{(k)}(x)\right\}' = \left\{\cos\left(x + \frac{k\pi}{2}\right)\right\}' = -\sin\left(x + \frac{k\pi}{2}\right) = \cos\left[\left(x + \frac{k\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right] \\ &= \cos\left(x + \frac{(k+1)\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

  より，$n = k + 1$ でも成り立っている.
- 以上より，$n = 0, 1, 2, \cdots$ で成り立っている.

$\boxed{\text{別解}}$

$$\begin{aligned} (\cos x + \mathrm{i} \sin x)^{(n)} &= (e^{\mathrm{i}x})^{(n)} = \mathrm{i}^n e^{\mathrm{i}x} = (e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}})^n e^{\mathrm{i}x} = e^{\mathrm{i}\frac{n\pi}{2}} e^{\mathrm{i}x} = e^{\mathrm{i}(x + \frac{n\pi}{2})} \\ &= \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) + \mathrm{i} \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

実部と虚部を比べて与式を得る.

(2-4) $f(x) = e^x \sin x, \quad f^{(n)}(x) = 2^{\frac{n}{2}} e^x \sin\left(x + \frac{n\pi}{4}\right) \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$

- $n = 0$ のときは成り立っている.
- $n = k$ のとき成り立っていると仮定すると，

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= \left\{f^{(k)}(x)\right\}' = \left\{2^{\frac{k}{2}} e^x \sin\left(x + \frac{k\pi}{4}\right)\right\}' \\ &= 2^{\frac{k}{2}} e^x \left\{\sin\left(x + \frac{k\pi}{4}\right) + \cos\left(x + \frac{k\pi}{4}\right)\right\} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2^{\frac{k}{2}} e^x \left\{ \sqrt{2} \sin \left[\left(x + \frac{k\pi}{4} \right) + \frac{\pi}{4} \right] \right\} \\
&= 2^{\frac{k+1}{2}} e^x \sin \left(x + \frac{(k+1)\pi}{4} \right)
\end{aligned}
$$

より，$n = k+1$ でも成り立っている．

- 以上より，$n = 0, 1, 2, \cdots$ で成り立っている．

(2-5) $f(x) = e^x \cos x, \quad f^{(n)}(x) = 2^{\frac{n}{2}} e^x \cos \left(x + \frac{n\pi}{4} \right) \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$

- $n = 0$ のときは成り立っている．
- $n = k$ のとき成り立っていると仮定すると，

$$
\begin{aligned}
f^{(k+1)}(x) = \left\{ f^{(k)}(x) \right\}' &= \left\{ 2^{\frac{k}{2}} e^x \cos \left(x + \frac{k\pi}{4} \right) \right\}' \\
&= 2^{\frac{k}{2}} e^x \left\{ \cos \left(x + \frac{k\pi}{4} \right) - \sin \left(x + \frac{k\pi}{4} \right) \right\} \\
&= 2^{\frac{k}{2}} e^x \left\{ \sqrt{2} \cos \left[\left(x + \frac{k\pi}{4} \right) + \frac{\pi}{4} \right] \right\} \\
&= 2^{\frac{k+1}{2}} e^x \cos \left(x + \frac{(k+1)\pi}{4} \right)
\end{aligned}
$$

より，$n = k+1$ でも成り立っている．

- 以上より，$n = 0, 1, 2, \cdots$ で成り立っている．

別解

$$
\begin{aligned}
(e^x \cos x + \mathrm{i} e^x \sin x)^{(n)} = (e^x e^{\mathrm{i}x})^{(n)} = (e^{(1+\mathrm{i})x})^{(n)} = (1+\mathrm{i})^n e^{(1+\mathrm{i})x} &= (\sqrt{2} e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}})^n e^{(1+\mathrm{i})x} \\
= 2^{\frac{n}{2}} e^{\mathrm{i}\frac{n\pi}{4}} e^{(1+\mathrm{i})x} = 2^{\frac{n}{2}} e^x e^{\mathrm{i}(x + \frac{n\pi}{4})} \\
= 2^{\frac{n}{2}} e^x \cos \left(x + \frac{n\pi}{4} \right) + \mathrm{i}\, 2^{\frac{n}{2}} e^x \sin \left(x + \frac{n\pi}{4} \right)
\end{aligned}
$$

実部と虚部を比べて与式を得る．

(2-6) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}, \quad f^{(n)}(x) = \dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}} \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$

- $n = 0$ のとき $\dfrac{0!}{(1-x)^{0+1}} = \dfrac{1}{1-x}$ で成り立っている．
- $n = k$ のとき成り立っていると仮定すると，

$$
\begin{aligned}
f^{(k+1)}(x) = \left\{ f^{(k)}(x) \right\}' &= \left\{ \frac{k!}{(1-x)^{k+1}} \right\}' \\
&= k! \left\{ -(k+1) \right\} (1-x)^{-(k+1)-1} (1-x)' \\
&= (k+1)! (1-x)^{-(k+2)} \\
&= \frac{(k+1)!}{(1-x)^{(k+1)+1}}
\end{aligned}
$$

より，$n = k+1$ でも成り立っている．

- 以上より，$n = 0, 1, 2, \cdots$ で成り立っている．

(2-7) $f(x) = \log(1+x), \quad f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(1+x)^n} \quad (n = 1, 2, \cdots)$

- $n = 1$ のとき $\dfrac{(-1)^2(0)!}{(1+x)^1} = \dfrac{1}{1+x}$ で成り立っている．

- $n=k$ のとき成り立っていると仮定すると,

$$
\begin{aligned}
f^{(k+1)}(x) = \left\{f^{(k)}(x)\right\}' &= \left\{\frac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{(1+x)^k}\right\}' \\
&= (-1)^{k+1}(k-1)!(-k)(1+x)^{-k-1}(1+x)' \\
&= (-1)^{k+2}k!(1+x)^{-(k+1)} \\
&= \frac{(-1)^{k+2}k!}{(1+x)^{k+1}}
\end{aligned}
$$

より,$n=k+1$ でも成り立っている.

- 以上より,$n=1,2,\cdots$ で成り立っている.

問題 3 二項係数 ${}_n\mathrm{C}_k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ を使った以下の公式を示せ.ただし,$0!=1$ とする.

(3-1) $(x+y)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k x^k y^{n-k}$

- $n=0$ のとき ${}_0\mathrm{C}_0 x^0 y^0 = \dfrac{0!}{0!0!} = 1$ で成り立っている.
- $n=\ell$ のとき成り立っていると仮定すると,

$$
\begin{aligned}
(x+y)^{\ell+1} = (x+y)(x+y)^\ell = (x+y)\sum_{k=0}^{\ell} {}_\ell\mathrm{C}_k x^k y^{\ell-k} \\
&= \sum_{k=0}^{\ell} {}_\ell\mathrm{C}_k (x^{k+1}y^{\ell-k} + x^k y^{\ell-k+1}) \\
&= \left(\sum_{k=0}^{\ell} {}_\ell\mathrm{C}_k x^{k+1}y^{\ell-k}\right) + \left(\sum_{k=0}^{\ell} {}_\ell\mathrm{C}_k x^k y^{\ell-k+1}\right) \\
&= \left(\sum_{k=1}^{\ell+1} {}_\ell\mathrm{C}_{k-1} x^k y^{\ell-k+1}\right) + \left(\sum_{k=0}^{\ell} {}_\ell\mathrm{C}_k x^k y^{\ell-k+1}\right) \\
&= \left({}_\ell\mathrm{C}_\ell x^{\ell+1} + \sum_{k=1}^{\ell} {}_\ell\mathrm{C}_{k-1} x^k y^{\ell-k+1}\right) + \left({}_\ell\mathrm{C}_0 y^{\ell+1} + \sum_{k=1}^{\ell} {}_\ell\mathrm{C}_k x^k y^{\ell-k+1}\right) \\
&= x^{\ell+1} + y^{\ell+1} + \sum_{k=1}^{\ell} \left({}_\ell\mathrm{C}_{k-1} + {}_\ell\mathrm{C}_k\right) x^k y^{\ell-k+1}.
\end{aligned}
$$

ここで,

$$
\begin{aligned}
{}_\ell\mathrm{C}_{k-1} + {}_\ell\mathrm{C}_k &= \frac{\ell!}{(k-1)!(\ell-k+1)!} + \frac{\ell!}{k!(\ell-k)!} \\
&= \frac{k\ell!}{\{k(k-1)!\}(\ell-k+1)!} + \frac{(\ell-k+1)\ell!}{k!\{(\ell-k+1)(\ell-k)!\}} \\
&= \frac{k\ell!}{k!(\ell-k+1)!} + \frac{(\ell-k+1)\ell!}{k!(\ell-k+1)!} \\
&= \frac{(\ell+1)\ell!}{k!(\ell-k+1)!} = \frac{(\ell+1)!}{k!(\ell-k+1)!} = {}_{\ell+1}\mathrm{C}_k
\end{aligned}
$$

なので，

$$
\begin{aligned}
(x+y)^{\ell+1} &= x^{\ell+1} + y^{\ell+1} + \sum_{k=1}^{\ell} {}_{\ell+1}\mathrm{C}_k x^k y^{\ell-k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{\ell+1} {}_{\ell+1}\mathrm{C}_k x^k y^{(\ell+1)-k}
\end{aligned}
$$

より，$n=\ell+1$ でも成り立っている．

- 以上より，$n=0,1,2,\cdots$ で成り立っている．

(3-2) $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k f^{(k)} g^{(n-k)}$

- $n=0$ のとき ${}_0\mathrm{C}_0 f^{(0)} g^{(0)} = \dfrac{0!}{0!0!} fg = fg = (fg)^{(0)}$ で成り立っている．
- $n=\ell$ のとき成り立っていると仮定すると，

$$
\begin{aligned}
(fg)^{(\ell+1)} &= \left\{(fg)^{(\ell)}\right\}' = \left(\sum_{k=0}^{\ell} {}_\ell\mathrm{C}_k f^{(k)} g^{(\ell-k)}\right)' \\
&= \sum_{k=0}^{\ell} {}_\ell\mathrm{C}_k \left\{\left(f^{(k)}\right)' g^{(\ell-k)} + f^{(k)} \left(g^{(\ell-k)}\right)'\right\} \\
&= \sum_{k=0}^{\ell} {}_\ell\mathrm{C}_k \left\{f^{(k+1)} g^{(\ell-k)} + f^{(k)} g^{(\ell-k+1)}\right\}.
\end{aligned}
$$

あとは前問と全く同じ計算で

$$
(fg)^{(\ell+1)} = \sum_{k=0}^{\ell+1} {}_{\ell+1}\mathrm{C}_k f^{(k)} g^{(\ell+1-k)}
$$

が示せる．よって，$n=\ell+1$ でも成り立っている．

- 以上より，$n=0,1,2,\cdots$ で成り立っている．

問題 4 $n=0,1,2,3,\cdots$ に対し，関数 $H_n(x)$ を

$$
H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} e^{-x^2}
$$

で定義する．

(4-1) $H_0(x)$, $H_1(x)$, $H_2(x)$, $H_3(x)$ を具体的に計算せよ．

$$
\begin{aligned}
&(e^{-x^2})' = -2xe^{-x^2} \\
&(e^{-x^2})'' = (-2xe^{-x^2})' = (-2+4x^2)e^{-x^2} \\
&(e^{-x^2})''' = \left\{(-2+4x^2)e^{-x^2}\right\}' = (8x+4x-8x^3)e^{-x^2} = (12x-8x^3)e^{-x^2}
\end{aligned}
$$

より，

$$
\begin{aligned}
H_0(x) &= (-1)^0 e^{x^2} e^{-x^2} = \boxed{1} \\
H_1(x) &= (-1)^1 e^{x^2} (e^{-x^2})' = -e^{x^2}(-2xe^{-x^2}) = \boxed{2x} \\
H_2(x) &= (-1)^2 e^{x^2} (e^{-x^2})'' = e^{x^2}(-2+4x^2)e^{-x^2} = \boxed{4x^2-2} \\
H_3(x) &= (-1)^3 e^{x^2} (e^{-x^2})''' = -e^{x^2}(12x-8x^3)e^{-x^2} = \boxed{8x^3-12x}
\end{aligned}
$$

(4-2) 漸化式

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$$

を示せ.

$$\begin{aligned}
H_{n+1}(x) &= (-1)^{n+1}e^{x^2}\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}}e^{-x^2} \\
&= (-1)^{n+1}e^{x^2}\frac{\mathrm{d}^{n}}{\mathrm{d}x^{n}}(e^{-x^2})' \\
&= (-1)^{n+1}e^{x^2}\frac{\mathrm{d}^{n}}{\mathrm{d}x^{n}}(-2xe^{-x^2}) \\
&= 2(-1)^{n}e^{x^2}(xe^{-x^2})^{(n)} \\
&= 2(-1)^{n}e^{x^2}\left\{{}_n\mathrm{C}_0 x(e^{-x^2})^{(n)} + {}_n\mathrm{C}_1(x)'(e^{-x^2})^{(n-1)} + {}_n\mathrm{C}_2(x)''(e^{-x^2})^{(n-2)} + \cdots\right\} \\
&= 2(-1)^{n}e^{x^2}\left\{x(e^{-x^2})^{(n)} + n(e^{-x^2})^{(n-1)}\right\} \\
&= 2x(-1)^{n}e^{x^2}(e^{-x^2})^{(n)} - 2n(-1)^{n-1}e^{x^2}(e^{-x^2})^{(n-1)} \\
&= 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x).
\end{aligned}$$