数学I　第12回　関数の微分法II

2015年7月1日　担当：佐藤 純

問題1 以下で与えられた関数 y を x で微分し，y' を求めよ．

(1-1) $y = 3^x$

(1-2) $y = 2^x + \cos x$

(1-3) $y = \pi \sin x + \cos x$

(1-4) $y = e \log x - e$

(1-5) $y = \log(2x)$

(1-6) $y = \log_{10} x$

(1-7) $y = \log x - \log \pi$

(1-8) $y = x^2 \log 2$

(1-9) $y = x^2 \log x$

(1-10) $y = \dfrac{\sin x}{e^x}$

(1-11) $y = \dfrac{x+1}{x-1}$

(1-12) $y = \dfrac{\log x}{x}$

問題2 以下で与えられた関数 $f(x)$ に対し，n 階の導関数 $f^{(n)}(x)$ が以下の式で与えられることを示せ．

(2-1) $f(x) = e^x, \quad f^{(n)}(x) = e^x \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$

(2-2) $f(x) = \sin x, \quad f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$

(2-3) $f(x) = \cos x, \quad f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$

(2-4) $f(x) = e^x \sin x, \quad f^{(n)}(x) = 2^{\frac{n}{2}} e^x \sin\left(x + \frac{n\pi}{4}\right) \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$

(2-5) $f(x) = e^x \cos x, \quad f^{(n)}(x) = 2^{\frac{n}{2}} e^x \cos\left(x + \frac{n\pi}{4}\right) \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$

(2-6) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}, \quad f^{(n)}(x) = \dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}} \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$

(2-7) $f(x) = \log(1+x), \quad f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(1+x)^n} \quad (n = 1, 2, \cdots)$

問題3 二項係数 ${}_n\mathrm{C}_k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ を使った以下の公式を示せ．ただし，$0! = 1$ とする．

(3-1) $(x+y)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k x^k y^{n-k}$

(3-2) $(fg)^{(n)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k f^{(k)} g^{(n-k)}$

問題4 $n = 0, 1, 2, 3, \cdots$ に対し，関数 $H_n(x)$ を

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} e^{-x^2}$$

で定義する．

(4-1) $H_0(x)$, $H_1(x)$, $H_2(x)$, $H_3(x)$ を具体的に計算せよ．

(4-2) 漸化式

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$$

を示せ．