数学演習I　第11回　数列

2015年6月24日　　担当：佐藤 純

問題1 以下の等差数列 $\{a_1, a_2, a_3, \cdots\}$ の一般項 a_n を n の式で表せ．

(1-1) $\{2, 4, 6, 8, 10, \cdots\}$
$a_n = \boxed{2n}$

(1-2) $\{1, 4, 7, 10, 13, \cdots\}$
$a_n = \boxed{3n-2}$

(1-3) $\{5, 2, -1, -4, -7, \cdots\}$
$a_n = \boxed{8-3n}$

問題2 以下の等比数列 $\{a_1, a_2, a_3, \cdots\}$ の一般項 a_n を n の式で表せ．

(2-1) $\{2, 4, 8, 16, 32, \cdots\}$
$\alpha_n = \boxed{2^n}$

(2-2) $\{4, 12, 36, 108, 324, \cdots\}$
$a_n = \boxed{4 \cdot 3^{n-1}}$

(2-3) $\{12, 6, 3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \cdots\}$
$a_n = \boxed{\dfrac{24}{2^n}}$

問題3 以下の和を計算せよ．

(3-1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} k = 1+2+3 = \boxed{6}$

(3-2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} 2^k = 2+4+8 = \boxed{14}$

(3-3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} 1 = 1+1+1+1 = \boxed{4}$

(3-4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} (k-1)^2(k+1) = 0 + 1 \times 3 + 2^2 \times 4 = \boxed{19}$

問題4 以下の和を n の式で表せ．

(4-1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \boxed{\frac{1}{2}n(n+1)}$

(4-2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} ar^{k-1}$

$$x = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}$$
$$rx = ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n$$
$$(1-r)x = a - ar^n$$
$$x = \boxed{a\frac{1-r^n}{1-r}}$$

(4-3)

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} = \boxed{\frac{n}{n+1}}\end{aligned}$$

(4-4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (3k-2) = 3\sum_{k=1}^{n} k - 2\sum_{k=1}^{n} 1 = \frac{3}{2}n(n+1) - 2n = \boxed{\frac{1}{2}n(3n-1)}$

問題5 以下の漸化式を満たす数列の a_1, a_2, a_3, a_4 を求め，さらに一般項 a_n を n の式で表せ．

(5-1) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + 3$

$\boxed{a_n = 3n - 2}$

(5-2) $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 3a_n$

$\boxed{a_n = 2 \cdot 3^{n-1}}$

問題 6 漸化式 $a_{n+1} = 3a_n - 4$ $(a_1 = 2)$ を満たす数列の一般項 a_n を求めたい．

(6-1) a_1, a_2, a_3, a_4 を求めよ．
$\boxed{a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 2}$

(6-2) $a_{n+1} - \beta = \alpha(a_n - \beta)$ を満たす α, β を求めよ．
$a_{n+1} = \alpha a_n - \alpha\beta + \beta$ より，係数を比べて $\boxed{\alpha = 3}$ を得る．
これを代入して，$a_{n+1} = 3a_n - 2\beta$ より係数を比べて，$\boxed{\beta = 2}$

(6-3) $b_n = a_n - \beta$ とするとき，b_n を求めよ．
$a_{n+1} - 2 = 3(a_n - 2)$ より，$b_{n+1} = 3b_n$ であるが，$b_1 = a_1 - 2 = 0$ より，$\boxed{b_n = 0}$

(6-4) a_n を求めよ．この式に $n = 1, 2, 3, 4$ を代入して (6-1) の結果を再現することを確かめよ．
$a_n = b_n + 2 = 2.$ $\boxed{a_n = 2}$

問題 7 フィボナッチ数列 $\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \cdots\}$ の一般項 a_n を求めたい．

(7-1) 漸化式を書け． $\boxed{a_{n+2} = a_{n+1} + a_n}$

(7-2) $a_{n+2} - \beta a_{n+1} = \alpha(a_{n+1} - \beta a_n)$ とするとき，α, β を求めよ．
これを展開して整理すると，

$$
\begin{aligned}
a_{n+2} &= \beta a_{n+1} + \alpha(a_{n+1} - \beta a_n) \\
a_{n+2} &= \beta a_{n+1} + \alpha a_{n+1} - \alpha\beta a_n \\
a_{n+2} &= (\alpha + \beta)a_{n+1} - \alpha\beta a_n
\end{aligned}
$$

なので，漸化式 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ と係数を比べて

$$
\begin{aligned}
\alpha + \beta &= 1 \\
\alpha\beta &= -1
\end{aligned}
$$

を得る．ここで，α, β を解とする 2 次方程式を考えると，

$$0 = (x - \alpha)(x - \beta) = x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = x^2 - x - 1$$

となるので，これを解の公式を使って解くと，

$$\boxed{\alpha, \beta = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}}$$

を得る．

(7-3) $b_n = a_{n+1} - \beta a_n$, $c_n = a_{n+1} - \alpha a_n$ とするとき，b_n, c_n を求めよ．
$a_{n+2} - \beta a_{n+1} = \alpha(a_{n+1} - \beta a_n)$ より，$b_{n+1} = \alpha b_n$ なので，
$b_n = b_1\alpha^{n-1} = (a_2 - \beta a_1)\alpha^{n-1} = (1 - \beta)\alpha^{n-1} = \alpha^n$ を得る．
また，α と β を入れ替えることにより $a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n)$ より，$c_{n+1} = \beta c_n$ なので，$c_n = c_1\beta^{n-1} = (a_2 - \alpha a_1)\beta^{n-1} = (1 - \alpha)\beta^{n-1} = \beta^n$ を得る．
以上より，$\boxed{b_n = \alpha^n,\ \ c_n = \beta^n}$

(7-4) $b_n - c_n$ を計算することにより，a_n を求めよ．

$$b_n - c_n = (\alpha - \beta)a_n = \alpha^n - \beta^n$$

に $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ を代入して，$\sqrt{5}a_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ なので，

$$\boxed{a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}}$$

を得る．

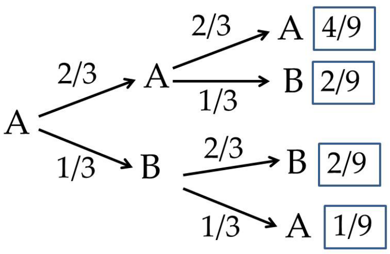
(7-5) a_n の式に $n = 1, 2, 3, 4$ を代入して，計算結果を確かめよ．
$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n)$ に代入して確かめる．

i. $\alpha - \beta = \sqrt{5}$ より，$\boxed{a_1 = 1}$
ii. $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \sqrt{5}$ より，$\boxed{a_2 = 1}$
iii. $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)\left\{(\alpha + \beta)^2 - \alpha\beta\right\} = 2\sqrt{5}$ より，$\boxed{a_3 = 2}$
iv. $\alpha^4 - \beta^4 = (\alpha^2 - \beta^2)\left\{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta\right\} = 3\sqrt{5}$ より，$\boxed{a_4 = 3}$

問題 8 J 君は A さんと B さんの家を行ったり来たりしている．サイコロを振り，3 の倍数が出たら別の家に移動し，3 の倍数でなければ今いる家にとどまるとする．n 回サイコロを振った後，A さんの家にいる確率を a_n, B さんの家にいる確率を b_n とする．最初，J 君は A さんの家にいたとする．すなわち，$a_0 = 1$, $b_0 = 0$ とする．

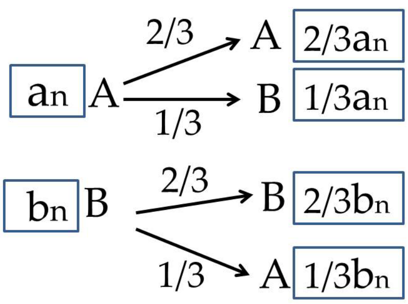
(8-1) (a_1, b_1), (a_2, b_2) を求め，$a_1 + b_1 = a_2 + b_2 = 1$ を確かめよ．
移動する確率は 1/3, とどまる確率は 2/3 であるので，
$a_1 = \frac{2}{3}$, $b_1 = \frac{1}{3}$,
$a_2 = \frac{2}{3}\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\frac{1}{3} = \frac{5}{9}$, $b_2 = \frac{2}{3}\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\frac{3}{2} = \frac{4}{9}$ であり，
確かに $a_1 + b_1 = a_2 + b_2 = 1$ が成り立っている．

$$\boxed{(a_1, b_1) = (\tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3})}, \quad \boxed{(a_2, b_2) = (\tfrac{5}{9}, \tfrac{4}{9})}$$



(8-2) a_n, b_n が満たす漸化式を書け．

上の考えをそのまま当てはめて，$\boxed{a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3}b_n}$ $\boxed{b_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{2}{3}b_n}$



(8-3) $a_n - b_n$ が満たす漸化式を解き，$a_n + b_n = 1$ と合わせて a_n, b_n を求めよ．
先程の漸化式を引き算すると，

$$a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{1}{3}(a_n - b_n)$$

なので，

$$a_n - b_n = \frac{1}{3^n}(a_0 - b_0) = \frac{1}{3^n}$$

を得る．また，$a_n + b_n = 1$ なので，$\boxed{a_n = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{3^n}\right)}$ $\boxed{b_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right)}$ を得る．

(8-4) 無限回サイコロを振った後，A さんと B さんの家どちらにいる確率の方が高いか？
$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{3^n} = 0$ なので，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 1/2$ より，$\boxed{\text{どちらも等しい}}$