数学I　第10回　ベクトルII

2015年6月17日　担当：佐藤 純

問題1 2つの3次元空間ベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ に対し，$|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$ を示せ．
ただし，ベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ のなす角を θ とする．

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \quad \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

とすると，

$$\vec{a}\times\vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$$

であるから，

$$\begin{aligned}
|\vec{a}\times\vec{b}|^2 &= (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \\
&= (a_2^2b_3^2 + a_3^2b_2^2 - 2a_2b_3a_3b_2) + (a_3^2b_1^2 + a_1^2b_3^2 - 2a_3b_1a_1b_3) + (a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 - 2a_1b_2a_2b_1) \\
&= (a_2^2b_3^2 + a_3^2b_2^2 + a_3^2b_1^2 + a_1^2b_3^2 + a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2) - 2[(a_1b_1)(a_2b_2) + (a_1b_1)(a_3b_3) + (a_2b_2)(a_3b_3)] \\
&= \left[a_1^2(b_2^2 + b_3^2) + a_2^2(b_1^2 + b_3^2) + a_3^2(b_1^2 + b_2^2)\right] - 2[(a_1b_1)(a_2b_2) + (a_1b_1)(a_3b_3) + (a_2b_2)(a_3b_3)] \\
&= [a_1^2(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - a_1^2b_1^2 \\
&\quad + a_2^2(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - a_2^2b_2^2 \\
&\quad + a_3^2(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - a_3^2b_3^2] \\
&\quad - 2[(a_1b_1)(a_2b_2) + (a_1b_1)(a_3b_3) + (a_2b_2)(a_3b_3)] \\
&= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) \\
&\quad - [a_1^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 + a_3^2b_3^2 + 2(a_1b_1)(a_2b_2) + 2(a_1b_1)(a_3b_3) + 2(a_2b_2)(a_3b_3)] \\
&= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \\
&= |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2 \\
&= |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta)^2 \\
&= |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2(1 - \cos^2\theta) \\
&= |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\sin^2\theta
\end{aligned}$$

ここで，$0 \leq \theta \leq \pi$ より，$\sin\theta \geq 0$ なので，2乗をそのまま外して $|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$ を得る．

問題2 三角形OABの3辺の長さを $a = \mathrm{OA}$, $b = \mathrm{OB}$, $c = \mathrm{AB}$ とし，面積を S とする．

(2-1) $\angle\mathrm{AOB} = \theta$ とすると，

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\theta$$

と書けることを示せ．

OAを底辺と考えるとBからOAに下ろした垂線の長さ h が高さであり $h = b\sin\theta$ なので，

$$S = \frac{1}{2}\times a\times b\sin\theta = \frac{1}{2}ab\sin\theta$$

となる．

(2-2) $\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{BA}}$ とすると，$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ と書けることを用いて，余弦定理

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$$

を示せ．

$$\begin{aligned}
c^2 &= |\vec{c}|^2 = |\vec{a} - \vec{b}|^2 = (\vec{a} - \vec{b})\cdot(\vec{a} - \vec{b}) \\
&= \vec{a}\cdot\vec{a} - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2 = a^2 - 2ab\cos\theta + b^2
\end{aligned}$$

(2-3) $s = \dfrac{a+b+c}{2}$ とすると，

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

となることを示せ．

$$\begin{aligned}
S^2 &= \frac{1}{4}a^2b^2\sin^2\theta = \frac{1}{4}a^2b^2(1-\cos^2\theta) = \frac{1}{4}a^2b^2\left[1 - \left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{4}a^2b^2\left(1 - \frac{(a^2+b^2-c^2)^2}{4a^2b^2}\right) = \frac{1}{4}\left(a^2b^2 - \frac{(a^2+b^2-c^2)^2}{4}\right) \\
&= \frac{1}{16}\left[4a^2b^2 - (a^2+b^2-c^2)^2\right] = \frac{1}{16}\left[(2ab)^2 - (a^2+b^2-c^2)^2\right] \\
&= \frac{1}{16}\{(2ab) + (a^2+b^2-c^2)\}\{(2ab) - (a^2+b^2-c^2)\} \\
&= \frac{1}{16}(2ab + a^2 + b^2 - c^2)(2ab - a^2 - b^2 + c^2) \\
&= \frac{1}{16}\{(a^2 + 2ab + b^2) - c^2\}\{c^2 - (a^2 - 2ab + b^2))\} \\
&= \frac{1}{16}\{(a+b)^2 - c^2\}\{c^2 - (a-b)^2)\} \\
&= \frac{1}{16}\{(a+b)+c\}\{(a+b)-c\}\{c+(a-b)\}\{c-(a-b)\} \\
&= \frac{1}{16}(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b) \\
&= \frac{a+b+c}{2} \times \frac{a+b-c}{2} \times \frac{c+a-b}{2} \times \frac{c-a+b}{2} \\
&= \frac{a+b+c}{2} \times \frac{(a+b+c)-2c}{2} \times \frac{(a+b+c)-2b}{2} \times \frac{(a+b+c)-2a}{2} \\
&= \frac{a+b+c}{2}\left(\frac{a+b+c}{2} - c\right)\left(\frac{a+b+c}{2} - b\right)\left(\frac{a+b+c}{2} - a\right) \\
&= s(s-a)(s-b)(s-c)
\end{aligned}$$

より，

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

を得る．

問題 3 3 次元空間内の 4 点 A, B, C, D の座標を, A:$(1,-3,2)$, B:$(-1,1,-2)$, C:$(3,0,1)$, D:$(2,-1,2)$ とする.

(3-1) 三角形 ABC の面積を求めよ.

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right| = \frac{1}{2}\left|(-2,4,-4)\times(2,3,-1)\right| = \frac{1}{2}\left|(-4+12,-8-2,-6-8)\right| \\
&= \frac{1}{2}\left|(8,-10,-14)\right| = \left|(4,-5,-7)\right| = \sqrt{16+25+49} = \boxed{3\sqrt{10}}
\end{aligned}
$$

(3-2) 四面体 ABCD の体積を求めよ.

底面を三角形 ABC としたときの四面体の高さを h は,

$$
h = \left|\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right|\left|\cos\varphi\right|
$$

である．ただし，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ とベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ のなす角を φ とした．すると，

$$
\begin{aligned}
V &= \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right|\left|\cos\varphi\right| = \frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right| \\
&= \frac{1}{6}\left|(8,-10,-14)\cdot(1,2,0)\right| = \frac{1}{6}(8-20-0) = \boxed{2}
\end{aligned}
$$

となる.