数学演習I　第9回　微分法I

2015年6月10日　　担当：佐藤 純

問題1 以下の極限値を計算せよ．

(1-1) $\lim_{x\to 0}(2x-1) = -1$

(1-2) $\lim_{x\to\infty}(2x-1) = \infty$

(1-3) $\lim_{x\to\infty}\sqrt{2x-1} = \infty$

(1-4) $\lim_{x\to\infty}(-2x+1) = -\infty$

(1-5) $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0$

(1-6) $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x} = 0$

(1-7) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2} = \infty$

(1-8) $\lim_{x\to\infty}\frac{3}{2x-1} = \frac{3}{\infty} = 0$

(1-9) $\lim_{x\to 0}\frac{x}{x^2+1} = \frac{0}{0+1} = \frac{0}{1} = 0$

(1-10) $\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{3x^2+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x}}{3+\frac{1}{x^2}} = \frac{0}{3+0} = \frac{0}{3} = 0$

(1-11) $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{3x^2+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{2}{3+\frac{1}{x^2}} = \frac{2}{3+0} = \frac{2}{3}$

(1-12) $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3}{3x^2+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{3+\frac{1}{x^2}} = \frac{\infty}{3+0} = \infty$

(1-13) $\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{\sqrt{3x^2+1}} = \lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{3+\frac{1}{x^2}}} = \frac{2}{\sqrt{3+0}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

問題2 以下の問いに答えよ．

(2-1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ の定義式を書け．

$$\boxed{f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}$$

(2-2) 自然数 n に対し，$(x^n)' = nx^{n-1}$ が成り立つことを上の定義式から導け．

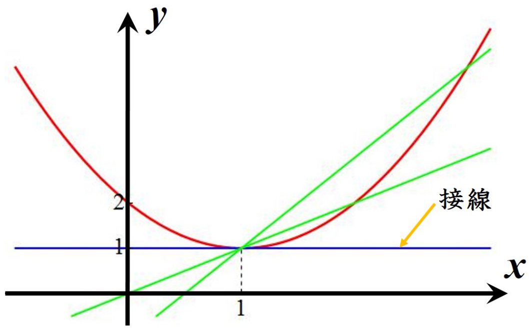
$$\begin{aligned}
(x^n)' &= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots) - x^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\left(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \cdots\right) \\
&= nx^{n-1}.
\end{aligned}$$

(2-3) 極限値 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(x+3h)-f(x)}{h}$ を $f'(x)$ で表せ．

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(x+3h)-f(x)}{h} &= 3\lim_{h\to 0}\frac{f(x+3h)-f(x)}{3h}\\ &= \boxed{3f'(x)}\end{aligned}$$

問題 3 $f(x)=x^2-2x+2$ とする．

(3-1) $y=f(x)$ のグラフを xy 平面に描け．



(3-2) 2 点 $(1,f(1))$, $(3,f(3))$ を直線で結び，$1\leq x\leq 3$ における y の平均変化率を求めよ．
$\dfrac{f(3)-f(1)}{3-1}=\dfrac{5-1}{3-1}=\boxed{2}$

(3-3) 2 点 $(1,f(1))$, $(2,f(2))$ を直線で結び，$1\leq x\leq 2$ における y の平均変化率を求めよ．
$\dfrac{f(3)-f(1)}{3-1}=\dfrac{2-1}{2-1}=\boxed{1}$

(3-4) $x=1$ における $f(x)$ のグラフの接線を引き，微分係数 $f'(1)$ を求めよ．
$f'(x)=2x-2,\ \ f'(1)=\boxed{0}$

問題 4 以下の関数を微分せよ．

(4-1) $y=x^7$,　$y'=\boxed{7x^6}$

(4-2) $y=x^3+x^2+x+1$,　$y'=\boxed{3x^2+2x+1}$

(4-3) $y=\dfrac{1}{x}$,　$y'=\boxed{-\dfrac{1}{x^2}}$

(4-4) $y=\dfrac{1}{x^3}$,　$y'=\boxed{-\dfrac{3}{x^4}}$

(4-5) $y=\dfrac{x^3+x^2+x+1}{x^2}$,　$y=x+1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}$ より，$y'=\boxed{1-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x^3}}$

(4-6) $y=\sqrt{x}$,　$y=x^{\frac{1}{2}}$ より，$y'=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\boxed{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}$

(4-7) $y=\sqrt[3]{x}$,　$y=x^{\frac{1}{3}}$ より，$y'=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\boxed{\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}}$

(4-8) $y=\sqrt[4]{x^3}$,　$y=x^{\frac{3}{4}}$ より，$y'=\frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}=\boxed{\dfrac{3}{4\sqrt[4]{x}}}$

(4-9) $y = \dfrac{2}{\sqrt[3]{x}}$ ， $y = 2x^{-\frac{1}{3}}$ より，$y' = 2\left(-\frac{1}{3}\right)x^{-\frac{4}{3}} = \boxed{-\dfrac{2}{3x\sqrt[3]{x}}}$

(4-10) $y = \dfrac{1}{x\sqrt{x}}$ ， $y = x^{-\frac{3}{2}}$ より，$y' = \left(-\frac{3}{2}\right)x^{-\frac{5}{2}} = \boxed{-\dfrac{3}{2x^2\sqrt{x}}}$

問題 5 地上から物体を速度 v_0 で投げ上げると，時刻 t における物体の高さ x は，$x = v_0 t - \dfrac{1}{2}gt^2$ で表される．

(5-1) 時刻 t における物体の速度 v を求めよ．

$v = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \boxed{v_0 - gt}$

(5-2) 物体が最高点に達する時刻 t とそのときの高さ x を求めよ．

最高点に達したとき $v = 0$ だから，$v = v_0 - gt = 0$ を解いてその時刻は $t = \dfrac{v_0}{g}$.

そのときの高さは，$x = v_0\dfrac{v_0}{g} - \dfrac{1}{2}g\left(\dfrac{v_0}{g}\right)^2 = \boxed{\dfrac{v_0^2}{2g}}$

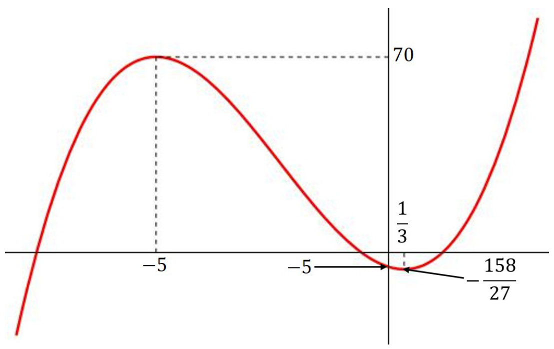
(5-3) 物体が地面に戻ってくる時刻 t とそのときの速度 v を求めよ．

地面に戻ったとき $x = 0$ だから，$x = v_0 t - \dfrac{1}{2}gt^2 = t\left(v_0 - \dfrac{1}{2}gt\right) = 0$ を解いてその時刻は $t = \dfrac{2v_0}{g}$.

そのときの速度は，$v = v_0 - g\dfrac{2v_0}{g} = \boxed{-v_0}$

問題 6 $f(x) = x^3 + 7x^2 - 5x - 5$ とする．

(6-1) $y = f(x)$ のグラフを xy 平面に描け．



(6-2) $y = f(x)$ のグラフの，$x = 2$ における接線の方程式を求めよ．

$f'(x) = 3x^2 + 14x - 5$ より，接線の傾きは $f'(2) = 12 + 28 - 5 = 35$. 接線は点 $(2, f(2)) = (2, 21)$ を通るので，接線の方程式は $y - 21 = 35(x - 2)$, $\boxed{y = 35x - 49}$ となる．

(6-3) 3 次方程式 $f(x) = 0$ の実数解の個数を求めよ．

グラフは x 軸と 3 点で交わってるので，実数解の個数は $\boxed{3\text{ 個}}$

(6-4) 3 次方程式 $f(x) = 0$ の最大の実数解を，小数第一位まで求めよ．

最大の実数解を a とする．グラフより，$a > \frac{1}{3}$ である．
$f(1) = -2 < 0$ より，$a > 1$ である．
$f(2) = 21 > 0$ より，$a < 2$ である．
$f(1.1) = -0.699 < 0$ より，$a > 1.1$ である．
$f(1.2) = 0.808 > 0$ より，$a < 1.2$ である．

以上より，$a = \boxed{1.1\cdots}$ である．