数学I　第9回　ベクトル

2015年6月10日　担当：佐藤 純

問題 1　3次元ベクトル $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を考える．以下の量は，スカラーかベクトルか，答えよ．

(1-1) $\vec{a}\cdot\vec{b}$　ベクトルとベクトルの内積は $\boxed{\text{スカラー}}$

(1-2) $\vec{a}\times\vec{b}$　ベクトルとベクトルの外積は $\boxed{\text{ベクトル}}$

(1-3) $(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\alpha$ はスカラー，$\alpha\vec{c}$ はベクトルのスカラー倍なので $\boxed{\text{ベクトル}}$

(1-4) $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$　$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{d}$ はベクトル，$\vec{d}\cdot\vec{c}$ は内積なので $\boxed{\text{スカラー}}$

(1-5) $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$　$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{d}$ はベクトル，$\vec{d}\times\vec{c}$ は外積なので $\boxed{\text{ベクトル}}$

問題 2　3次元空間内の3点 O, A, B の座標を，O:$(0,0,0)$, A:$(1,-3,2)$, B:$(-1,1,-2)$ とする．
ベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ を，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で定める．

(2-1) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を計算せよ．
$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times(-1)+(-3)\times1+2\times(-2)=-1-3-4=\boxed{-8}$

(2-2) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の外積 $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$ を計算し，$\vec{c}$ は $\vec{a}, \vec{b}$ と直交することを示せ．

$$\begin{aligned}\vec{c}&=((-3)\times(-2)-2\times1,\ 2\times(-1)-1\times(-2),\ 1\times1-(-3)\times(-1))\\&=(6-2,-2+2,1-3)=\boxed{(4,0,-2)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{c}&=1\times4+(-3)\times0+2\times(-2)=0,\\\vec{b}\cdot\vec{c}&=(-1)\times4+1\times0+(-2)\times(-2)=0.\end{aligned}$$

(2-3) 点Bを通り，ベクトル $\vec{a}$ に平行な直線の方程式を求めよ．
直線上の任意の点を Q: (x,y,z) とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\vec{a}$ と書ける．ここで，t は任意の定数である．$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(x,y,z)$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(-1,1,-2)$ より，

$$\begin{aligned}x&=-1+t,\\y&=1-3t,\\z&=-2+2t\end{aligned}$$

となる．これから t を消去すれば求める直線の式になる．t について解くと，$t=x+1=-\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z+2}{2}$ なので，求める直線の式は，$\boxed{x+1=-\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z+2}{2}}$ となる．

(2-4) 点Bを通り，ベクトル $\vec{a}$ に垂直な平面の方程式を求めよ．
求める平面上の任意の点を Q: (x,y,z) とおくと，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{BQ}}$ はこの平面内にあるので，ベクトル $\vec{a}$ と常に直交している．よって，$\vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BQ}}=0$ と書ける．ここで，$\vec{a}=(1,-3,2)$, $\overrightarrow{\mathrm{BQ}}=(x+1,y-1,z+2)$ より，

$$0=(x+1)-3(y-1)+2(z+2)=x-3y+2z+8$$

となる．よって，求める平面の式は，$\boxed{x-3y+2z+8=0}$ となる．

(2-5) 3 点 O, A, B を通る平面の方程式を求めよ．

求める平面上の任意の点を Q= (x, y, z) とすると，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ は常にベクトル $\vec{c}$ に直交するので，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} \cdot \vec{c} = 4x - 2z = 0$. よって，求める平面の方程式は，$\boxed{2x - z = 0}$ となる．

(2-6) 三角形 OAB の面積を求めよ．

三角形 OAB の面積 $S = \dfrac{1}{2}|\vec{c}| = \dfrac{1}{2}\sqrt{4^2 + 0^2 + (-2)^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{20} = \boxed{\sqrt{5}}$

問題 3 ゼロでない 2 つのベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ に対し，$|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$ が成り立つとき，ベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ は直交することを示せ．

$0 = |\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2 = 4\vec{a} \cdot \vec{b}$

したがって，$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ よりベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ は直交する．

問題 4 3 次元ベクトル $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を考える．ベクトルの大きさを，$a = |\vec{a}|$, $b = |\vec{b}|$, $c = |\vec{c}|$ とする．以下の式を証明せよ．

(4-1) $|\vec{a} \times \vec{b}|^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = a^2b^2$

ベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ のなす角を θ とすると，

$$\begin{aligned} |\vec{a} \times \vec{b}| &= ab \sin\theta, \\ \vec{a} \cdot \vec{b} &= ab \cos\theta \end{aligned}$$

なので，

$$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = a^2b^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = a^2b^2$$

となる．

(4-2) $(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b}) = 2\vec{b} \times \vec{a}$

$$\begin{aligned} (\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b}) &= \vec{a} \times \vec{a} - \vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{a} - \vec{b} \times \vec{b} \\ &= 0 + \vec{b} \times \vec{a} + \vec{b} \times \vec{a} - 0 \\ &= 2\vec{b} \times \vec{a} \end{aligned}$$

(4-3) $(\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{b} - \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a}$

$$\begin{aligned} (\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{b} - \vec{c}) &= \vec{a} \times \vec{b} - \vec{a} \times \vec{c} - \vec{b} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} \\ &= \vec{a} \times \vec{b} + \vec{c} \times \vec{a} - 0 + \vec{b} \times \vec{c} \\ &= \vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a} \end{aligned}$$

(4-4) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \quad \vec{b} = (b_1, b_2, b_3), \quad \vec{c} = (c_1, c_2, c_3),$$

とする．また，

$$\vec{d} = \vec{b} \times \vec{c}, \quad \vec{d} = (d_1, d_2, d_3)$$

とすると，

$$
\begin{aligned}
d_1 &= b_2c_3 - b_3c_2, \\
d_2 &= b_3c_1 - b_1c_3, \\
d_3 &= b_1c_2 - b_2c_1
\end{aligned}
$$

なので，

$$
\begin{aligned}
\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) &= \vec{a} \times \vec{d} \\
&= (a_2d_3 - a_3d_2,\ a_3d_1 - a_1d_3,\ a_1d_2 - a_2d_1) \\
&= (a_2(b_1c_2 - b_2c_1) - a_3(b_3c_1 - b_1c_3), \\
&\qquad a_3(b_2c_3 - b_3c_2) - a_1(b_1c_2 - b_2c_1), \\
&\qquad a_1(b_3c_1 - b_1c_3) - a_2(b_2c_3 - b_3c_2))
\end{aligned}
$$

となる．また，

$$
\begin{aligned}
\vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}) &= (b_1, b_2, b_3)(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) - (c_1, c_2, c_3)(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) \\
&= (b_1(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) - c_1(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3), \\
&\qquad b_2(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) - c_2(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3), \\
&\qquad b_3(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) - c_3(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)) \\
&= (a_2(b_1c_2 - b_2c_1) - a_3(b_3c_1 - b_1c_3), \\
&\qquad a_3(b_2c_3 - b_3c_2) - a_1(b_1c_2 - b_2c_1), \\
&\qquad a_1(b_3c_1 - b_1c_3) - a_2(b_2c_3 - b_1c_2))
\end{aligned}
$$

なので，左辺＝右辺となり，与式を得る．