数学演習I　第7回　場合の数，確率

2015年5月27日　担当：佐藤 純

問題1 以下の4つの数字を使って4桁の整数を作るとき，何通りの数字ができるか．

(1-1) 1, 2, 3, 4

$4 \times 3 \times 2 \times 1 = \boxed{24\text{通り}}$

(1-2) 0, 1, 2, 3

$3 \times 3 \times 2 \times 1 = \boxed{18\text{通り}}$

(1-3) 1, 1, 2, 3

$\frac{4\times3\times2\times1}{2} = \boxed{12\text{通り}}$

(1-4) 1, 1, 3, 3

$\frac{4\times3\times2\times1}{2\times2} = \boxed{6\text{通り}}$

問題2 75名のクラスに，2問の問題を出した．第1問の正解者は26名，第2問の正解者は32名であり，2問とも不正解の者は27名であった．

(2-1) 2問とも正解したのは何名か．

$26 + 32 + 27 - 75 = \boxed{10\text{人}}$

(2-2) 1問だけ正解したのは何名か．

$(26 - 10) + (32 - 10) = \boxed{38\text{人}}$

問題3 2つのさいころを同時に投げるとき，以下の確率を求めよ．

(3-1) 2つのサイコロが同じ目になる．

2つめのさいころが同じ目になればいいから，$\boxed{\dfrac{1}{6}}$

(3-2) 2つのサイコロの目の差が1になる．

(1,2)
(2,1)(2,3)
(3,2)(3,4)
(4,3)(4,5)
(5,4)(5,6)
(6,5)

の10通りあるので，$\dfrac{10}{36} = \boxed{\dfrac{5}{18}}$

(3-3) 2つのサイコロの目の積が5の倍数になる．

積が5の倍数にならないためには，5がひとつも出なければいいので，その確率は $\left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{36}$ である．よって，積が5の倍数になる確率は $1 - \dfrac{25}{36} = \boxed{\dfrac{11}{36}}$

問題4 立方体の6つの面を6色の異なる色で塗る塗り方は，何通りあるか．
ただし，立方体を回転させて一致する塗り方は同じであるとする．

上面の色を固定する．下面の色は5通り．側面の四色の塗り方は，$4! = 24$ 通りだが，回転によって4通りは同じになるので，$24/4 = 6$ 通り．よって，全部で $5 \times 6 = \boxed{30\text{通り}}$

問題5 男子10人，女子7人の中から計4人のメンバーを選ぶとき，以下の選び方は何通りあるか．

(5-1) 男子を2名，女子を2名選ぶ

男子の選び方が $\frac{10\times9}{2} = 45$ 通り，女子の選び方が $\frac{7\times6}{2} = 21$ 通り，全部で $45 \times 21 = \boxed{945\text{通り}}$

(5-2) 4人全員を男子にする

$\frac{10\times9\times8\times7}{4!} = \boxed{210\text{通り}}$

(5-3) 少なくとも 1 人の女子をメンバーに入れる
全ての選び方は $\frac{17\times16\times15\times14}{4!}$=2380 通りなので，
女子が一人もいない選び方を引いて $2380-210=$ $\boxed{2170\text{ 通り}}$

問題 6 4 枚の硬貨を投げるとき，以下の確率を求めよ．

(6-1) 4 枚とも表が出る．

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4=\boxed{\frac{1}{16}}$$

(6-2) 1 枚だけ表が出る．

いつ表が出るかで 4 通りあるので，$4\left(\frac{1}{2}\right)^4=\boxed{\frac{1}{4}}$

(6-3) 少なくとも 1 枚は表が出る．

全部裏が出る確率 $\frac{1}{16}$ を 1 から引いて，$1-\frac{1}{16}=\boxed{\frac{15}{16}}$

問題 7 J 君は 10 回に 1 回の割合で，立ち寄った場所に傘を忘れてくる．ある日，J 君は 3 人の友人 A, B, C の家に順に立ち寄って，家に帰った後，傘を忘れたことに気付いた．誰の家に傘がある可能性が一番高いか？

A 君の家で忘れる確率は，$\frac{1}{10}$.
B 君の家で忘れる確率は，A 君の家に忘れてこなかったことが条件になるので，$\frac{9}{10}\cdot\frac{1}{10}$ となる．
同様に，C 君の家で忘れる確率は，$\frac{9}{10}\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{1}{10}$ となる．
したがって，$\boxed{\text{A 君の家}}$に傘がある確率が一番高い．

問題 8 6 本のクジがあって，2 本は当たり，4 本は外れである．当たれば 9 点，外れれば 3 点もらえるとする．このとき，得点の期待値を求めよ．

$$9\times\frac{2}{6}+3\times\frac{4}{6}=\boxed{5\text{ 点}}$$

問題 9 1 つのサイコロを 6 の目が出るまで振り続け，サイコロを振った回数を得点とする．

(9-1) 得点が 3 点となる確率を求めよ．

6 以外の目が 2 連続で出て，3 回目に 6 の目が出る確率だから，$\left(\frac{5}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{6}=\boxed{\frac{25}{216}}$

(9-2) 得点の期待値を求めよ．

同様に，得点が n 点となる確率は $\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{6}$ となるので，得点の期待値 E は

$$E=\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{6}\sum_{n=1}^{\infty}np^{n-1}$$

となる．ただし，$p=\frac{5}{6}$ とおいた．ここで，$(p^n)'=np^{n-1}$ より，

$$f(p)=\frac{1}{6}\sum_{n=1}^{\infty}p^n$$

とおけば，$E=f'(p)$ となる．等比級数の公式より

$$\sum_{n=1}^{N}p^n=\frac{1-p^{N+1}}{1-p}$$

なので，

$$f(p)=\frac{1}{6}\sum_{n=1}^{\infty}p^n=\frac{1}{6}\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}p^n=\frac{1}{6}\lim_{N\to\infty}\frac{1-p^{N+1}}{1-p}=\frac{1}{6}\frac{1}{1-p}$$

となるので，

$$E=f'(p)=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{1-p}\right)'=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{1-p}\right)^2=\boxed{6}$$

を得る．

問題 10 1枚の硬貨を裏が出るまで投げ続ける．ただし，100回連続で表が出たら，そこで終了とする．硬貨を投げた回数を n とするとき，2^n 万円貰えるとする．参加費は 50 万円である．

(10-1) 少なくとも何回連続で表を出さなければ，損をするか．
$2^5=32, 2^6=64$ より，$\boxed{\text{5回連続}}$ で表を出せば6回硬貨を投げることになり，64万円もらえる．

(10-2) 利益の期待値を求めよ．
硬貨を投げる回数が n 回になる確率は $\frac{1}{2^n}$ なので，獲得賞金の期待値は

$$\sum_{n=1}^{100}2^n\cdot\frac{1}{2^n}=\sum_{n=1}^{100}1=100$$

より100万円なので，参加費を引いて利益の期待値は $\boxed{\text{50万円}}$ となる．

(10-3) この賭けはするべきか，しないべきか．

理論的な期待値の計算値としては確かに利益が50万円も出るのでこの賭けは得なような気がするが，最初に5連続で表を出さなければ損をすることになり，これは非常に厳しい．
実際，この賭けで得をする確率は $\dfrac{1}{32}$ で，損をする確率は $\dfrac{31}{32}$ である．
つまり，一回勝負の場合には，この賭けはすべきではない．
それなのになぜ期待値が+50万円になったかというと，資金が無限にあって，負けても負けても賭けを繰り返すうちにいつか大勝ちし，全ての負けを取り戻せるのである．
これに必要な資金は $2^{100}=10^{30}$ 万円となり，現実的でない．
したがって，$\boxed{\text{この賭けはすべきではない}}$