数学演習I　第6回　ベクトル

2015年5月20日　担当：佐藤 純

問題1 右図について以下の問いに答えよ.

(1-1) $\vec{b}$ を $\vec{a}$ を用いて表せ.

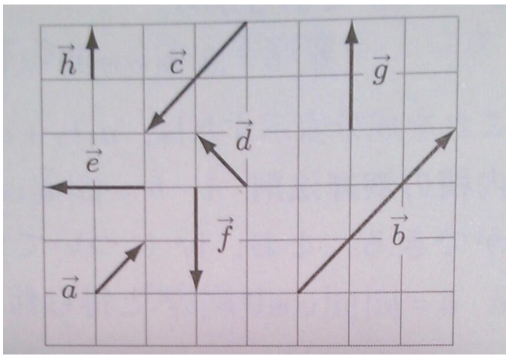
$\boxed{\vec{b}=3\vec{a}}$

(1-2) $\vec{c}$ を $\vec{a}$ を用いて表せ.

$\boxed{\vec{c}=-2\vec{a}}$

(1-3) $\vec{a}+\vec{d}$ と等しいベクトルを, $\vec{e}, \vec{f}, \vec{g}, \vec{h}$ の中から選べ.

$\boxed{\vec{g}}$



問題2 以下の計算をせよ.

(2-1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{CA}}+\overrightarrow{\mathrm{CB}}-\overrightarrow{\mathrm{DB}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{CB}}+\overrightarrow{\mathrm{BD}}=(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}})+(\overrightarrow{\mathrm{CB}}+\overrightarrow{\mathrm{BD}})=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\boxed{\overrightarrow{\mathrm{OD}}}$

(2-2) $\overrightarrow{\mathrm{DC}}+\overrightarrow{\mathrm{ED}}+\overrightarrow{\mathrm{BA}}+\overrightarrow{\mathrm{CB}}=(\overrightarrow{\mathrm{ED}}+\overrightarrow{\mathrm{DC}})+(\overrightarrow{\mathrm{CB}}+\overrightarrow{\mathrm{BA}})=\overrightarrow{\mathrm{EC}}+\overrightarrow{\mathrm{CA}}=\boxed{\overrightarrow{\mathrm{EA}}}$

(2-3) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}+\overrightarrow{\mathrm{QR}}+\overrightarrow{\mathrm{RP}}=\overrightarrow{\mathrm{PR}}+\overrightarrow{\mathrm{RP}}=\boxed{0}$

(2-4) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}-\overrightarrow{\mathrm{RQ}}-\overrightarrow{\mathrm{SR}}+\overrightarrow{\mathrm{SP}}=(\overrightarrow{\mathrm{PQ}}+\overrightarrow{\mathrm{QR}})+(\overrightarrow{\mathrm{RS}}+\overrightarrow{\mathrm{SP}})=\overrightarrow{\mathrm{PR}}+\overrightarrow{\mathrm{RP}}=\boxed{0}$

(2-5) $\dfrac{3\vec{a}-5\vec{b}}{2}+\dfrac{2\vec{a}-3\vec{b}}{3}=\boxed{\dfrac{13\vec{a}-21\vec{b}}{6}}$

(2-6) $\dfrac{2\vec{a}+3\vec{b}}{5}-\dfrac{4\vec{a}-3\vec{b}}{3}=\boxed{\dfrac{-14\vec{a}+24\vec{b}}{15}}$

(2-7) $-\dfrac{4\vec{x}-5}{2}-\dfrac{2\vec{x}+3}{4}=\boxed{\dfrac{-10\vec{x}+7}{4}}$

問題3 $\vec{a}=(3,-4), \vec{b}=(-3,9), \vec{c}=(5,12)$ であるとき，次のベクトルの成分および大きさを求めよ.

(3-1) $-5\vec{a}$

(3-2) $\vec{a}+\vec{b}$

(3-3) $\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$

(3-4) $\dfrac{\vec{c}}{2}$

(3-5) $\dfrac{3\vec{a}-2\vec{b}-3\vec{c}}{11}$

$|\vec{a}|=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5,$
$|\vec{b}|=3|(-1,3)|=3\sqrt{(-1)^2+3^2}=3\sqrt{10},$
$|\vec{c}|=\sqrt{5^2+12^2}=13,$

(3-1) $-5\vec{a}=\boxed{(-15,20)},\qquad |-5\vec{a}|=5|\vec{a}|=\boxed{25}$

(3-2) $\vec{a}+\vec{b}=\boxed{(0,5)},\qquad |\vec{a}+\vec{b}|=\boxed{5}$

(3-3) $\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}=\boxed{(11,-1)}$, $\quad |\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}|=\boxed{\sqrt{122}}$

(3-4) $\frac{\vec{c}}{2}=\boxed{(\frac{5}{2},6)}$, $\quad |\frac{\vec{c}}{2}|=\frac{1}{2}|\vec{c}|=\boxed{\frac{13}{2}}$

(3-5) $\dfrac{3\vec{a}-2\vec{b}-3\vec{c}}{11}=\boxed{(0,-6)}$, $\quad \left|\dfrac{3\vec{a}-2\vec{b}-3\vec{c}}{11}\right|=\boxed{6}$

問題 4 以下の２つのベクトルについて，内積$\vec{a}\cdot\vec{b}$および２つのベクトルのなす角θを求めよ.

(4-1) $\vec{a}=(-1,2)$, $\vec{b}=(1,3)$
$|\vec{a}|=\sqrt{5}$,
$|\vec{b}|=\sqrt{10}$,
$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=}(-1)\times 1+2\times 3=\boxed{5}$,
$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ より，$\boxed{\theta=\pi/4}$.

(4-2) $\vec{a}=(4,-1)$, $\vec{b}=(3,12)$
$|\vec{a}|=\sqrt{17}$,
$|\vec{b}|=3\sqrt{5}$,
$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=}4\times 3+(-1)\times 12=\boxed{0}$,
$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=0$ より，$\boxed{\theta=\pi/2}$.

(4-3) $\vec{a}=(\sqrt{3},1)$, $\vec{b}=(2,2\sqrt{3})$
$|\vec{a}|=2$,
$|\vec{b}|=4$,
$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=4\sqrt{3}}$,
$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ より，$\boxed{\theta=\pi/6}$.

問題 5 以下の問いに答えよ.

(5-1) ２つのベクトル$\vec{a}=(9,x)$, $\vec{b}=(-3,2)$が平行である時，xの値を求めよ.
平行なので，$\vec{a}=t\vec{b}$と書け，$9=-3t$より$t=-3$なので, $x=2t=-6$. $\boxed{x=-6}$

(5-2) ２つのベクトル$\vec{a}=(2,x)$, $\vec{b}=(-6,5)$が垂直である時，xの値を求めよ.
垂直なので$\vec{a}\cdot\vec{b}=-12+5x=0$より，$\boxed{x=\frac{12}{5}}$

(5-3) $\vec{a}=(2,-3)$, $\vec{b}=(1,4)$であるとき，$|\vec{a}+t\vec{b}|$を最小にするtの値を求めよ.

[**解 1**]
$$|\vec{a}+t\vec{b}|^2=|(2+t,-3+4t)|^2=(2+t)^2+(-3+4t)^2=17t^2-20t+13$$
$$=17\left(t-\frac{10}{17}\right)^2+13-\frac{100}{17}$$

より，$\boxed{t=\frac{10}{17}}$で最小値をとる.

[**解 2**] $\vec{a}+t\vec{b}$が$\vec{b}$と直交するとき，その大きさは最小になる.

$$(\vec{a}+t\vec{b})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{b}+t|\vec{b}|^2=-10+17t=0$$

より，$\boxed{t=\frac{10}{17}}$を得る.

(5-4) $|\vec{a}|=3\sqrt{2}$, $|\vec{b}|=2\sqrt{2}$, $|\vec{a}-2\vec{b}|=\sqrt{6}$ であるとき，
$\vec{a}+\vec{b}$ と $\vec{a}-t\vec{b}$ が垂直となるように t の値を定めよ．

$$6=|\vec{a}-2\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2=18-4\vec{a}\cdot\vec{b}+32$$

より，$\vec{a}\cdot\vec{b}=11$.

$$0=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-t\vec{b})=|\vec{a}|^2+(1-t)\vec{a}\cdot\vec{b}-t|\vec{b}|^2=18+11(1-t)-8t=-19t+29$$

より，$\boxed{t=\frac{29}{19}}$ を得る．

問題 6 △ABC の重心は，３点 A, B, C の “平均” として $\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{3}$ と表される．
ただし，点 O は任意の基準点である．

(6-1) $\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ で表せ．

基準点として A を選べば，$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AA}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{3}=\boxed{\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{3}}$ となる．

(6-2) AG と BC の交点を H とするとき，BH=HC, AG:GH=2:1 となることを示せ．

AH は AG の延長なので，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ $(\alpha>1)$ と書ける．
また，H は BC 上の点なので，$\overrightarrow{\mathrm{BH}}=\beta\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ $(0<\beta<1)$ と書ける．

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AH}}&=\alpha\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\frac{\alpha}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{\alpha}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\\&=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BH}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\beta(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}})=(1-\beta)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{AC}}\end{aligned}$$

より，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の係数を比較して，

$$\begin{cases}\frac{\alpha}{3}=1-\beta\\ \frac{\alpha}{3}=\beta\end{cases}$$

これを解いて，$\alpha=\frac{3}{2}$, $\beta=\frac{1}{2}$.

$\beta=\frac{1}{2}$ より，BH=$\frac{1}{2}$BC なので，$\boxed{\mathrm{BH=HC}}$
$\alpha=\frac{3}{2}$ より，AH=$\frac{3}{2}$AG なので，$\boxed{\mathrm{AG:GH=2:1}}$