数学演習I　第5回　指数関数，対数関数

2015年5月13日　　担当：佐藤 純

問題1 以下の計算をせよ．

(1-1) $a^{-7}a^3 = a^{-4}$

(1-2) $(a^{-5})^{-3} = a^{15}$

(1-3) $(a^3b^{-2})^4 \times (ab^3)^{-2} = a^{10}b^{-14}$

(1-4) $\left(\dfrac{a^2}{b}\right)^{-3} \times \left(\dfrac{a^3}{b^2}\right) = \dfrac{b}{a^3}$

(1-5) $\sqrt[3]{-27} = -3$

(1-6) $\sqrt[4]{625} = 5$

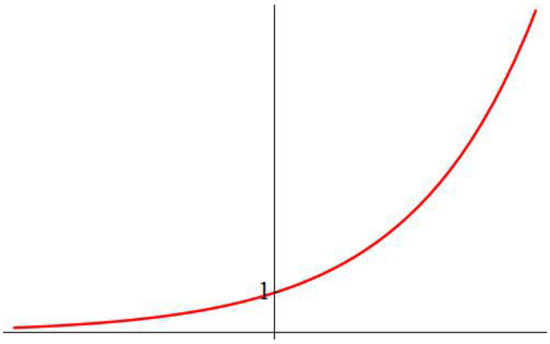
(1-7) $8^{\frac{2}{3}} \times 4^{-1} = 1$

(1-8) $\sqrt[3]{2}(2^{\frac{2}{3}} - 2^{-\frac{1}{3}}) = 1$

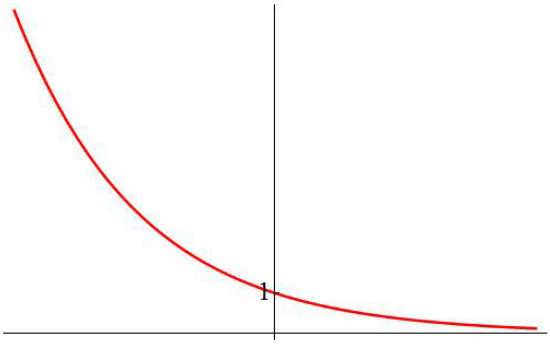
(1-9) $(\sqrt{a} \times \sqrt[3]{b})^6 = a^3b^2$

問題2 $y = 2^x$ と $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ のグラフを描け．これらのグラフはどのような関係にあるか.

$y = 2^x$



$y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$



y 軸対称

問題3 光の進む速さは30万km/秒である．1光年はおよそ何kmか？

30万km=3×10^5kmより，1光年=$3 \times 10^5 \times 3600 \times 24 \times 365 = 9 \times 10^{12}$km.

問題4 $\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[6]{7}$ を小さい順に並べよ.

$(\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[6]{7})$ を6乗すると，$(2^3, 3^2, 7) = (8, 9, 7)$ なので，$\sqrt[6]{7} < \sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$.

問題 5 以下の方程式を解け．

(5-1) $25^x = 3 - 2 \cdot 5^x$

$y = 5^x$ とおくと，$25^x = (5^2)^x = 5^{2x} = (5^x)^2 = y^2$ なので，

$$\begin{aligned} &y^2 = 3 - 2y, \\ &y^2 + 2y - 3 = 0, \\ &(y-1)(y+3) = 0, \end{aligned}$$

となるが，$y > 0$ なので $y = 1$．したがって，$x = \log_5 y = 0$．

$$\boxed{x = 0}$$

(5-2) $3 \cdot 5^{2x} - 5^{x+1} - 10 = 5^{2x} + 3 \cdot 5^x$

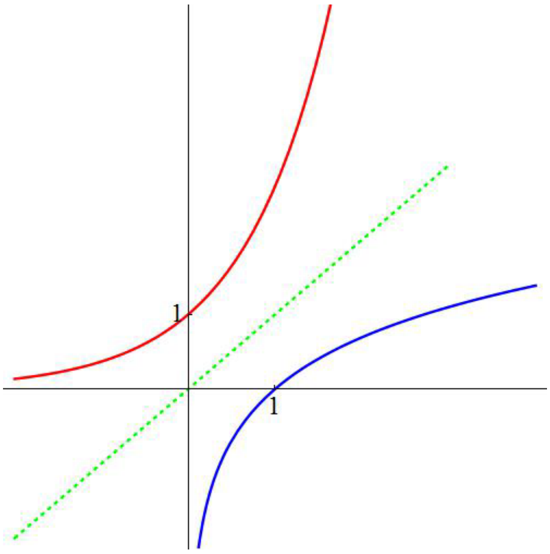
同様に，$y = 5^x$ とすると，$5^{2x} = y^2$，　$5^{x+1} = 5^x \cdot 5^1 = 5y$．

$$\begin{aligned} &3y^2 - 5y = y^2 + 3y, \\ &2y^2 - 8y - 10 = 0, \\ &y^2 - 4y - 5 = 0, \\ &(y+1)(y-5) = 0, \end{aligned}$$

となるが，$y > 0$ なので $y = 5$．したがって，$x = \log_5 y = 1$．

$$\boxed{x = 1}$$

問題 6 $y = e^x$ と $y = \log_e x$ のグラフを描け．これらのグラフはどのような関係にあるか．



（赤：$y = e^x$，　青：$y = \log_e x$）

直線 $y = x$ に関して対称（両者は逆関数の関係なので）

問題 7 以下の値を求めよ．

(7-1) $\log_5 625 = 4$

(7-2) $\log_2 32 = 5$

(7-3) $\log_2 \dfrac{1}{64} = -6$

(7-4) $\log_5 \sqrt{125} = \dfrac{3}{2}$

(7-5) $\log_3 \sqrt[4]{27} = \dfrac{3}{4}$

(7-6) $\log_2 \dfrac{1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{1}{2}$

(7-7) $\log_{10} 0.001 = -3$

$\boxed{\text{問題 8}}$ 以下の計算をせよ．

(8-1) $\log_{10} 2 + \log_{10} 5 = \log_{10}(2 \times 5) = \log_{10} 10 = 1$

(8-2) $\log_{10} 4 + 2\log_{10} 5 = \log_{10} 4 + \log_{10} 5^2 = \log_{10}(4 \times 25) = \log_{10} 100 = 2$

(8-3) $\log_3 63 - \log_3 7 = \log_3 \frac{63}{7} = \log_3 9 = 2$

(8-4) $\log_2 72 - 2\log_2 3 = \log_2 72 - \log_2 3^2 = \log_2 \frac{72}{9} = \log_2 8 = 3$

(8-5) $\log_3 \dfrac{1}{9} - \log_2 \dfrac{1}{8} = (-2) - (-3) = 1$

$\boxed{\text{問題 9}}$ 以下の方程式を解け．

(9-1)

$$\begin{aligned}&\log_5(2x-5) = 2,\\ &2x-5 = 5^2 = 25,\\ &x = 15.\end{aligned}$$

(9-2) $(\log_2 x)^2 + 10\log_2 x = -25$

$y = \log_2 x$ とおくと，

$$\begin{aligned}&y^2 + 10y + 25 = 0,\\ &(y+5)^2 = 0,\\ &y = -5,\\ &x = 2^y = \frac{1}{32}.\end{aligned}$$

$\boxed{\text{問題 10}}$ $\log_{10} 2 = a$, $\log_{10} 3 = b$ とするとき，$\log_{24} 75$ の値を求めよ．

$$\log_{24} 75 = \frac{\log_{10} 75}{\log_{10} 24} = \frac{\log_{10}(3 \times 5^2)}{\log_{10}(2^3 \times 3)} = \frac{\log_{10} 3 + 2\log_{10} 5}{3\log_{10} 2 + \log_{10} 3}$$

ここで,$\log_{10} 5 = \log_{10} \frac{10}{2} = \log_{10} 10 - \log 102 = 1 - a$ より，

$$\log_{24} 75 = \frac{b + 2(1-a)}{3a+b} = \frac{-2a+b+2}{3a+b}.$$

$\boxed{\text{問題 11}}$ $\log_2 3$, $\log_4 8$ の大小を比較せよ．

$\log_4 8 = \log_4 2^3 = \log_4(4^{\frac{1}{2}})^3 = \log_4 4^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}$.

$(\log_2 3,\ \log_4 8) \quad \Leftrightarrow \quad (\log_2 3,\ \frac{3}{2}) \quad \Leftrightarrow \quad (2\log_2 3,\ 3) \quad \Leftrightarrow \quad (\log_2 9,\ \log_2 8) \quad \Leftrightarrow \quad (9,\ 8)$

$9 > 8$ より，$\log_2 3 > \log_4 8$.

$\boxed{\text{問題 12}}$ $\log_{10} 2 = 0.3010\cdots$, $\log_{10} 3 = 0.4771\cdots$ を用いて，以下の問いの答えよ．

(12-1) 6^{100} は何桁の数か？

$$\log_{10} 6^{100} = 100\log_{10} 6 = 100(\log_{10} 2 + \log_{10} 3) = 77.81\ldots$$

より，

$$\begin{aligned}&77 < \log_{10} 6^{100} < 78,\\ &10^{77} < 6^{100} < 10^{78}\end{aligned}$$

ここで，例えば 3 桁の数 427 に対して，$100 < 427 < 1000$, すなわち $10^2 < 427 < 10^3$ が成り立つので，整数 N が $10^n < N < 10^{n+1}$ を満たせば，N は $(n+1)$ 桁の数であることが分かる．従って，6^{100} は $\boxed{78\text{ 桁}}$ の数である．

(12-2) $\left(\frac{1}{6}\right)^{100}$ を小数で表したとき、小数点以下第何位に初めてゼロでない数が現れるか？
また、その数字は何か？(例えば、$0.0007261\cdots$ ならば、第 4 位に 7 が現れる)

$x = \left(\frac{1}{6}\right)^{100}$ とする．

$$\log_{10} x = \log_{10} 6^{-100} = -100 \log_{10} 6 = -100(\log_{10} 2 + \log_{10} 3) = -77.81\cdots$$

より、

$$\begin{aligned} -78 &< \log_{10} x < -77, \\ 10^{-78} &< x < 10^{-77} \end{aligned}$$

となる．ここで，例えば $0.0007261\cdots$ に対して，

$$\begin{aligned} 0.0001 &< 0.0007261\cdots < 0.001, \\ 10^{-4} &< 0.0007261\cdots < 10^{-3} \end{aligned}$$

が成り立つので，数 x が $10^{-(n+1)} < x < 10^{-n}$ を満たせば，x は小数第 $(n+1)$ 位に初めてゼロでない数が現れる．従って，$\boxed{x\ \text{は小数点以下第 78 位に初めてゼロでない数が現れる。}}$

次に，先ほどの例の $t = 0.0007261\cdots$ に対して，$10^4 t = 7.261\cdots$ より，$7 < 10^4 t < 8$ が成り立つ．すなわち，小数第 ℓ 位に初めてゼロでない数が現れる t に対し，$n < 10^{\ell} t < n+1$ が成り立てば，最初に現れる数は n となる．

$x = \left(\frac{1}{6}\right)^{100}$, $y = 10^{78}x$ とすると，

$$\log_{10} y = \log_{10}(10^{78}x) = \log_{10} 10^{78} + \log_{10} x = 78 - 77.81\cdots = 0.19\cdots$$

となるが，ここで

$$\log_{10} 1 = 0, \quad \log_{10} 2 = 0.3010\cdots$$

より，

$$\begin{aligned} &\log_{10} 1 < 0.19\cdots < \log_{10} 2, \\ &\log_{10} 1 < \log_{10} y < \log_{10} 2, \\ &1 < y < 2, \\ &1 < 10^{78}x < 2, \end{aligned}$$

より、$\boxed{x\ \text{の小数点以下第 78 位の数は、1 である。}}$