数学I　第5回　オイラーの公式

2015年5月13日　　担当：佐藤 純

$\boxed{\text{問題1}}$ 関数 $f(x)$ が、$f(x+y)=f(x)f(y)$ を満たすとする。

(1-1) $f(0)=0$ とすると、全ての実数 x に対して $f(x)=0$ となってしまうことを示せ。
$f(x+y)=f(x)f(y)$ において $y=0$ とすると、$f(x)=f(x)f(0)=0$ となり、これは任意の x に対して成り立つ。

(1-2) そこで、$f(0)\neq 0$ を仮定する。すると、$f(0)=1$ となることを示せ。
$f(x+y)=f(x)f(y)$ において $x=y=0$ とすると、$f(0)=f(0)f(0)$ となり、$f(0)\neq 0$ なので両辺を $f(0)$ で割れば、$f(0)=1$ を得る。

(1-3) $f(x)f(-x)=1$ を示せ。
$f(x+y)=f(x)f(y)$ において $y=-x$ とすれば、$f(x)f(-x)=f(0)=1$ を得る。

$\boxed{\text{問題2}}$ 三角関数は、指数関数を用いて

$$\cos x=\frac{e^{\mathrm{i}x}+e^{-\mathrm{i}x}}{2},\qquad \sin x=\frac{e^{\mathrm{i}x}-e^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}$$

と表されることを示せ。

$e^{\mathrm{i}x}=\cos x+\mathrm{i}\sin x$, $e^{-\mathrm{i}x}=\cos x-\mathrm{i}\sin x$ より、$e^{\mathrm{i}x}+e^{-\mathrm{i}x}=2\cos x$, $e^{\mathrm{i}x}-e^{-\mathrm{i}x}=2\mathrm{i}\sin x$ なので、与式を得る。

$\boxed{\text{問題3}}$ 以下の複素数を、具体的に $a+\mathrm{i}b$, (a, b は実数) の形に表せ。

(3-1) $e^{2\pi\mathrm{i}}=1$

(3-2) $e^{\pi\mathrm{i}}=-1$

(3-3) $e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}=\mathrm{i}$

(3-4) $e^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{2}}=-\mathrm{i}$

(3-5) $e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$

(3-6) $e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$

(3-7) $e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$

$\boxed{\textbf{問題 4}}$ n 次方程式 $x^n = 1$ の解を求めたい。

(4-1) $x^3 - 1$ を因数分解して 2 次方程式の解の公式を用いることによって、3 つの複素数解を全て求めよ。

$0 = x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$ より、$x = 1$ または $x^2 + x + 1 = 0$ なので、$x = 1, \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$.

(4-2) $x^3 = 1 = e^{2\pi\mathrm{i}} = e^{4\pi\mathrm{i}} = e^{6\pi\mathrm{i}}$ より、$x = e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}, e^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}}, e^{2\pi\mathrm{i}}$ と解が求まる。これらを具体的に $a + \mathrm{i}b$, (a, b は実数) の形に表し、最初に求めた解と一致することを確かめよ。

$e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$, $e^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}} = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$, $e^{\mathrm{i}\frac{6\pi}{3}} = 1$, となり、最初に求めた解と全て一致。

(4-3) 同様にして、8 次方程式 $x^8 = 1$ の 8 つの複素数解を全て求めよ。

$x^8 = 1 = e^{2n\pi\mathrm{i}}$, $n = 1, 2, \cdots, 8$ より、$x = e^{\mathrm{i}\frac{n\pi}{4}}$, $n = 1, 2, \cdots, 8$ なので、

$$x = \pm 1,\ \pm\mathrm{i},\ \frac{\pm 1 \pm \mathrm{i}}{\sqrt{2}}$$

を得る。