

**問題1** 関数  $f(x)$  が、 $f(x+y) = f(x)f(y)$  を満たすとする。

- (1-1)  $f(0) = 0$  とすると、全ての実数  $x$  に対して  $f(x) = 0$  となってしまうことを示せ。
- (1-2) そこで、 $f(0) \neq 0$  を仮定する。すると、 $f(0) = 1$  となることを示せ。
- (1-3)  $f(x)f(-x) = 1$  を示せ。

**問題2** 三角関数は、指数関数を用いて

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

と表されることを示せ。

**問題3** 以下の複素数を、具体的に  $a + ib$ , ( $a, b$  は実数) の形に表せ。

- (3-1)  $e^{2\pi i}$
- (3-2)  $e^{\pi i}$
- (3-3)  $e^{i\frac{\pi}{2}}$
- (3-4)  $e^{i\frac{3\pi}{2}}$
- (3-5)  $e^{i\frac{\pi}{6}}$
- (3-6)  $e^{i\frac{2\pi}{3}}$
- (3-7)  $e^{-i\frac{\pi}{3}}$

**問題4**  $n$  次方程式  $x^n = 1$  の解を求めたい。

- (4-1)  $x^3 - 1$  を因数分解して2次方程式の解の公式を用いることによって、3つの複素数解を全て求めよ。
- (4-2)  $x^3 = 1 = e^{2\pi i} = e^{4\pi i} = e^{6\pi i}$  より、 $x = e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{i\frac{4\pi}{3}}, e^{2\pi i}$  と解が求まる。これらを具体的に  $a + ib$ , ( $a, b$  は実数) の形に表し、最初に求めた解と一致することを確認せよ。
- (4-3) 同様にして、8次方程式  $x^8 = 1$  の8つの複素数解を全て求めよ。