

問題1 関数 $f(x)$ が、 $f(x+y) = f(x)f(y)$ を満たすとする。

(1-1) $f(0) = 0$ とすると、全ての実数 x に対して $f(x) = 0$ となってしまうことを示せ。

(1-2) そこで、 $f(0) \neq 0$ を仮定する。すると、 $f(0) = 1$ となることを示せ。

(1-3) $f(x)f(-x) = 1$ を示せ。

問題2 三角関数は、指数関数を用いて

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

と表されることを示せ。

問題3 以下の複素数を、具体的に $a + ib$, (a, b は実数) の形に表せ。

(3-1) $e^{2\pi i}$

(3-2) $e^{\pi i}$

(3-3) $e^{i\frac{\pi}{2}}$

(3-4) $e^{i\frac{3\pi}{2}}$

(3-5) $e^{i\frac{\pi}{6}}$

(3-6) $e^{i\frac{2\pi}{3}}$

(3-7) $e^{-i\frac{\pi}{3}}$

問題4 n 次方程式 $x^n = 1$ の解を求めたい。

(4-1) $x^3 - 1$ を因数分解して2次方程式の解の公式を用いることによって、3つの複素数解を全て求めよ。

(4-2) $x^3 = 1 = e^{2\pi i} = e^{4\pi i} = e^{6\pi i}$ より、 $x = e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{i\frac{4\pi}{3}}, e^{2\pi i}$ と解が求まる。これらを具体的に $a + ib$, (a, b は実数) の形に表し、最初に求めた解と一致することを確認せよ。

(4-3) 同様にして、8次方程式 $x^8 = 1$ の8つの複素数解を全て求めよ。