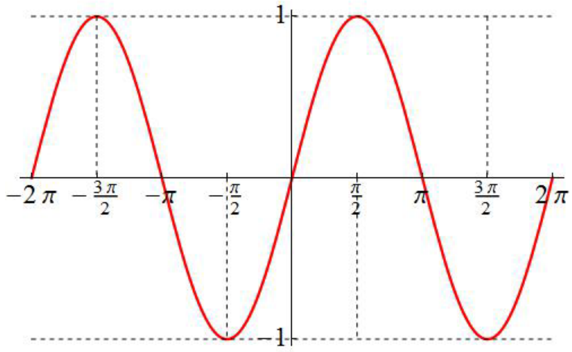
数学演習I　第4回　三角関数

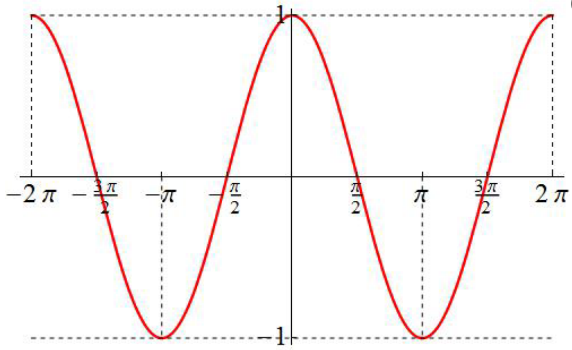
2015 年 4 月 29 日　　担当：佐藤 純

問題 1 以下の三角関数のグラフを与えられた x の範囲で描け．
ただし，座標軸との交点の座標，極大極小点の座標を全て書き込むこと．

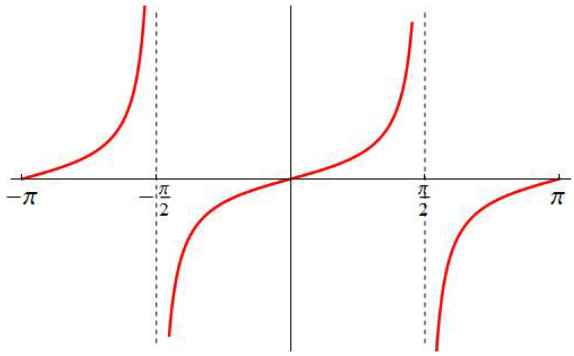
(1-1) $\sin x \qquad (-2\pi < x < 2\pi)$



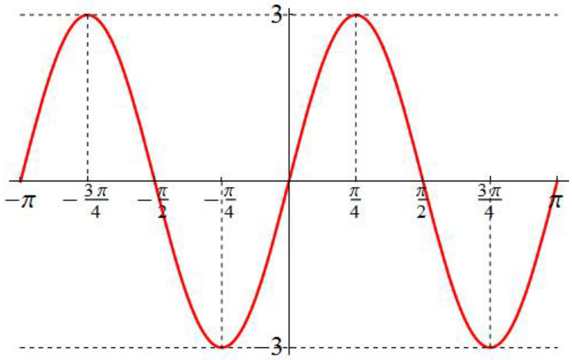
(1-2) $\cos x \qquad (-2\pi < x < 2\pi)$



(1-3) $\tan x \qquad (\pi < x < \pi)$

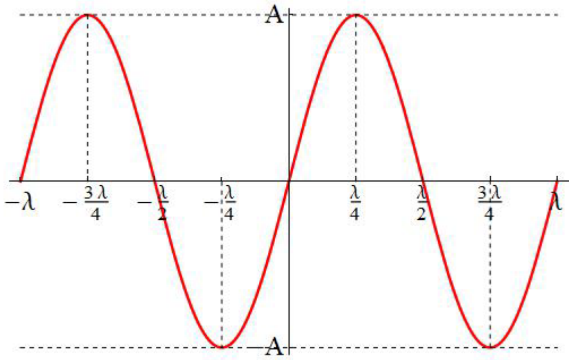


(1-4) $3\sin 2x \qquad (-\pi < x < \pi)$



(1-5) $A\sin\left(\dfrac{2\pi}{\lambda}x\right) \qquad (-\lambda < x < \lambda)$

(ただし，$A, \lambda > 0$)



問題 2

(2-1) $\sin x = \frac{2}{3}$ のとき，$\sin(-x), \sin(x+\pi)$ の値を求めよ．
$\sin(-x) = -\frac{2}{3}, \sin(x+\pi) = -\frac{2}{3}$

(2-2) $\cos x = \frac{2}{3}$ のとき，$\cos(-x), \cos(x+\pi)$ の値を求めよ．
$\cos(-x) = \frac{2}{3}, \cos(x+\pi) = -\frac{2}{3}$

(2-3) $\tan x = 2$ のとき，$\tan(-x), \tan(x+\pi)$ の値を求めよ．
$\tan(-x) = -2, \tan(x+\pi) = 2$

問題 3 オイラーの公式 $e^{\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i}\sin x$ を使って，加法定理

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$
$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

を示せ。

$$
\begin{aligned}
e^{\mathrm{i}(\alpha+\beta)} &= e^{\mathrm{i}\alpha}e^{\mathrm{i}\beta} = (\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha)(\cos\beta + \mathrm{i}\sin\beta) \\
&= (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + \mathrm{i}(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)
\end{aligned}
$$

一方，$e^{\mathrm{i}(\alpha+\beta)} = \cos(\alpha+\beta) + \mathrm{i}\sin(\alpha+\beta)$ なので，

$$\cos(\alpha+\beta) + \mathrm{i}\sin(\alpha+\beta) = (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + \mathrm{i}(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)$$

である。これの実部と虚部を比べて与式を得る。

問題 4 上で示した加法定理の式を使って，以下の式を導け.

(4-1) $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$
$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos(-\beta) + \cos\alpha\sin(-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$
$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos(-\beta) - \sin\alpha\sin(-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

(4-2) $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$

$\tan(\alpha-\beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$

$$
\begin{aligned}
\tan(\alpha+\beta) &= \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta} \\
&= \frac{\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\frac{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} = \frac{\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} + \frac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} - \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} = \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1 - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\frac{\sin\beta}{\cos\beta}} = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}
\end{aligned}
$$

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan(-\beta)}{1 - \tan\alpha\tan(-\beta)} = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$

(4-3) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$
$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$
$\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$

$\sin 2\alpha = \sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\sin\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$
$\cos 2\alpha = \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$
$\tan 2\alpha = \dfrac{\tan\alpha + \tan\alpha}{1 - \tan\alpha\tan\alpha} = \dfrac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$

(4-4) $\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}$， $\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$
$\tan^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$

$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$ より，$2\sin^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha$,　 $\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}$
$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ より，$2\cos^2\alpha = 1 + \cos 2\alpha$,　 $\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$
$\tan^2\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$

問題 5 以下の式を，$A\sin(x+\alpha)$ の形に表せ。

(5-1) $\sin x + \cos x$

$$A = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2},$$

$$\begin{aligned}\sin x + \cos x &= \sqrt{2}\sin(x+\alpha)\\ &= \sqrt{2}(\sin x\cos\alpha + \cos x\sin\alpha)\\ &= (\sqrt{2}\cos\alpha)\sin x + (\sqrt{2}\sin\alpha)\cos x\end{aligned}$$

より，

$$\sqrt{2}\cos\alpha = 1,\ \sqrt{2}\sin\alpha = 1,$$
$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}},\ \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

なので，$\alpha = \frac{\pi}{4}$. 以上より，$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})$

(5-2) $\sqrt{3}\sin x + \cos x$

$$A = \sqrt{\sqrt{3}^2+1^2} = 2,$$

$$\begin{aligned}\sqrt{3}\sin x + \cos x &= 2\sin(x+\alpha)\\ &= 2(\sin x\cos\alpha + \cos x\sin\alpha)\\ &= (2\cos\alpha)\sin x + (2\sin\alpha)\cos x\end{aligned}$$

より，

$$2\cos\alpha = \sqrt{3},\ 2\sin\alpha = 1,$$
$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \sin\alpha = \frac{1}{2}$$

なので，$\alpha = \frac{\pi}{6}$. 以上より，$\sqrt{3}\sin x + \cos x = 2\sin(x+\frac{\pi}{6})$

(5-3) $\sqrt{2}\sin x - \sqrt{6}\cos x$

$$A = \sqrt{\sqrt{2}^2+(-\sqrt{6})^2} = 2\sqrt{2},$$

$$\begin{aligned}\sqrt{2}\sin x - \sqrt{6}\cos x &= 2\sqrt{2}\sin(x+\alpha)\\ &= 2\sqrt{2}(\sin x\cos\alpha + \cos x\sin\alpha)\\ &= (2\sqrt{2}\cos\alpha)\sin x + (2\sqrt{2}\sin\alpha)\cos x\end{aligned}$$

より，

$$2\sqrt{2}\cos\alpha = \sqrt{2},\ 2\sqrt{2}\sin\alpha = -\sqrt{6},$$
$$\cos\alpha = \frac{1}{2},\ \sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

なので，$\alpha = -\frac{\pi}{3}$. 以上より，$\sqrt{2}\sin x - \sqrt{6}\cos x = 2\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{3})$

問題 6

(6-1) $\cos 2x - \cos x = 0$ を満たす x (ただし，$0 \leq x < 2\pi$) を全て求めよ.
$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ より，

$$(2\cos^2 x - 1) - \cos x = 0.$$

ここで，$\cos x = t$ とおくと，

$$2t^2 - t - 1 = 0.$$

これを解いて，

$$\begin{aligned}&(2t+1)(t-1) = 0,\\ &t = 1, -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

$t = \cos x = 1$ のとき，$x = 0$
$t = \cos x = -\frac{1}{2}$ のとき，$x = \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi.$
以上より，

$$x = 0,\ \frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi.$$

(6-2) $\sin x - \sin y = \frac{1}{3},\ \cos x + \cos y = \frac{1}{2}$ であるとき，$\cos(x+y)$ の値を求めよ.

$$\begin{aligned}&(\sin x - \sin y)^2 + (\cos x + \cos y)^2\\ &\quad = (\sin^2 x + \sin^2 y - 2\sin x \sin y) + (\cos^2 x + \cos^2 y + 2\cos x \cos y)\\ &\quad = (\sin^2 x + \cos^2 x) + (\sin^2 y + \cos^2 y) + 2(\cos x \cos y - \sin x \sin y)\\ &\quad = 2 + 2\cos(x+y)\end{aligned}$$

$(\sin x - \sin y)^2 + (\cos x + \cos y)^2 = (\frac{1}{3})^2 + (\frac{1}{2})^2 = \frac{13}{36}$ より，

$$\begin{aligned}2 + 2\cos(x+y) &= \frac{13}{36},\\ \cos(x+y) &= \frac{1}{2}\left(\frac{13}{36} - 2\right) = -\frac{59}{72}.\end{aligned}$$

(6-3) $\tan\alpha = \frac{1}{5}$ のとき，$\tan 2\alpha, \tan 4\alpha$ の値を求めよ。

$$\begin{aligned}\tan 2\alpha &= \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{1}{25}} = \frac{10}{25-1} = \frac{5}{12},\\ \tan 4\alpha &= \frac{2\tan 2\alpha}{1-\tan^2 2\alpha} = \frac{\frac{5}{6}}{1-\frac{25}{144}} = \frac{\frac{5}{6}\times 144}{144-25} = \frac{120}{119}.\end{aligned}$$

(6-4) $t = \tan\frac{x}{2}$ のとき，$\sin x, \cos x, \tan x$ を t の式で表せ.

$$\tan x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1-t^2},$$

$$1 + t^2 = 1 + \tan^2\frac{x}{2} = 1 + \frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}$$

より，$\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1}{1+t^2}$ であるが，$\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1+\cos x}{2}$ なので，

$$\begin{aligned}&\frac{1}{1+t^2}=\frac{1+\cos x}{2},\\&(1+t^2)(1+\cos x)=2,\\&(1+t^2)\cos x=2-(1+t^2)=1-t^2\end{aligned}$$

より，

$$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

を得る。
また，

$$\sin x=\tan x\cos x=\frac{2t}{1+t^2}$$

である。
以上をまとめると，

$$\tan x=\frac{2t}{1-t^2},\qquad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\qquad \sin x=\frac{2t}{1+t^2},$$

となる。

(6-5) $\sin x=\frac{11}{14}$, $\sin y=\frac{13}{14}$ $(0<x,y<\pi/2)$ であるとき，$x+y$ の値を求めよ.
$0<x+y<\pi$ より，$\cos(x+y)$ の値が分かれば，$x+y$ の値が 1 通りに定まる.
（$\sin(x+y)$ の値が分かっても，$x+y$ の値は $0<x+y<\pi$ の範囲に 2 通りある）
$0<x,y<\pi/2$ より $\cos x>0,\cos y>0$ であるから，

$$\cos x=\sqrt{1-(\tfrac{11}{14})^2}=\frac{5\sqrt{3}}{14},\qquad \cos y=\sqrt{1-(\tfrac{13}{14})^2}=\frac{3\sqrt{3}}{14}.$$

$$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y=\frac{5\sqrt{3}}{14}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{14}-\frac{11}{14}\cdot\frac{13}{14}=-\frac{1}{2}$$

より，

$$x+y=\frac{\pi}{3}.$$

(6-6) $\frac{1}{\sin\theta}+\frac{1}{\cos\theta}=2\sqrt{2}$ $(0<\theta<\pi/2)$ であるとき，$\sin\theta\cos\theta$ の値を求めよ.

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\sin\theta}+\frac{1}{\cos\theta}=2\sqrt{2},\\&2\sqrt{2}\sin\theta\cos\theta=\left(\frac{1}{\sin\theta}+\frac{1}{\cos\theta}\right)\sin\theta\cos\theta=\cos\theta+\sin\theta,\\&\left(2\sqrt{2}\sin\theta\cos\theta\right)^2=(\cos\theta+\sin\theta)^2=\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\sin^2\theta=1+2\sin\theta\cos\theta,\\&8\left(\sin\theta\cos\theta\right)^2=1+2\sin\theta\cos\theta,\end{aligned}$$

となるが，ここで $x=\sin\theta\cos\theta$ とおくと，

$$\begin{aligned}&8t^2=1+2t,\\&8t^2-2t-1=0,\\&(4t+1)(2t-1)=0\end{aligned}$$

を得る．$0<\theta<\pi/2$ より $\cos\theta>0,\sin\theta>0$ なので $x>0$ だから，$x=\frac{1}{2}$ となる.

$$\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}.$$