数学I　第4回　指数関数

2015年4月29日　　担当：佐藤 純

問題1 以下の値を求めよ。

(1-1) $8^{2/3} = 4$

(1-2) $\left(3^{-\frac{5}{4}}\right)^{\frac{8}{5}} = 3^{-\frac{5}{4}\times\frac{8}{5}} = 3^{-2} = \dfrac{1}{9}$

(1-3)

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{a}{x}\right)^{\frac{x}{a}}\right\}^a = e^a$$

ここで、ネイピア数の定義式

$$e = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

を使った。

(1-4) $\log_{10} 0.1 = -1$

(1-5) $\log_3 2 - \log_3 18 = \log_3 2 - \log_3(2\times 3^2) = \log_3 2 - (\log_3 2 + 2\log_3 3) = -2$

問題2

(2-1) a, b, c を正の実数とし、a, c は1でないとする。$\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ を証明せよ。

$x = \log_a b$ とすると、$b = a^x$ である。両辺 $\log_c$ をとると、$\log_c b = \log_c a^x = x\log_c a$ なので、$x = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ を得る。

(2-2) $\log_9 27$ を計算せよ。

$\log_9 27 = \dfrac{\log_3 27}{\log_3 9} = \dfrac{3}{2}$

問題3 ドラえもんの道具に、栗饅頭の数が5分で2倍になるバイバインという道具がある。

(3-1) 栗饅頭を直径3cmの球、宇宙を直径300億光年の球とすると、宇宙の体積は栗饅頭の体積の何倍となるか？ただし、1光年は10兆kmである。

宇宙の直径$=$300億光年$= 3\times 10^{10}$光年$= 3\times 10^{10}\times 10^{13}km= 3\times 10^{23}km= 3\times 10^{28}$cm なので、直径は$10^{28}$倍。よって、体積は、$(10^{28})^3 = 10^{84}$倍。

(3-2) 最初に栗饅頭が一個あったとして、バイバインを使うとおよそどのくらいの時間の後に、栗饅頭の体積が宇宙の体積を超えるか？ただし、$\log_{10} 2 = 0.3010\cdots$ を使ってよい。

n回の分裂で宇宙体積を超えるとすると、$2^n = 10^{84}$ となる。両辺 $\log_{10}$ を取ると、$84 = \log_{10} 2^n = n\log_{10} 2 = 0.3010n$. よって, $n = 84/0.3010 = 279$ となる。1回の分裂に5分かかるので、279×5分$= 1395$分$=$約24時間。

$\boxed{\textbf{問題 4}}$ 双曲線関数 $\cosh x, \sinh x$ を

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$
$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

で定義する。加法定理

$$\cosh(\alpha+\beta) = \cosh\alpha\cosh\beta + \sinh\alpha\sinh\beta$$
$$\sinh(\alpha+\beta) = \sinh\alpha\cosh\beta + \cosh\alpha\sinh\beta$$

を示せ。

$$\begin{aligned}
(\text{右辺}) &= \cosh\alpha\cosh\beta + \sinh\alpha\sinh\beta \\
&= \frac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{2}\frac{e^\beta + e^{-\beta}}{2} + \frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{2}\frac{e^\beta - e^{-\beta}}{2} \\
&= \frac{e^{\alpha+\beta} + e^{\alpha-\beta} + e^{-\alpha+\beta} + e^{-\alpha-\beta}}{4} + \frac{e^{\alpha+\beta} - e^{\alpha-\beta} - e^{-\alpha+\beta} + e^{-\alpha-\beta}}{4} \\
&= \frac{e^{\alpha+\beta} + e^{-\alpha-\beta}}{2} = \cosh(\alpha+\beta) = (\text{左辺})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\text{右辺}) &= \sinh\alpha\cosh\beta + \cosh\alpha\sinh\beta \\
&= \frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{2}\frac{e^\beta + e^{-\beta}}{2} + \frac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{2}\frac{e^\beta - e^{-\beta}}{2} \\
&= \frac{e^{\alpha+\beta} + e^{\alpha-\beta} - e^{-\alpha+\beta} - e^{-\alpha-\beta}}{4} + \frac{e^{\alpha+\beta} - e^{\alpha-\beta} + e^{-\alpha+\beta} - e^{-\alpha-\beta}}{4} \\
&= \frac{e^{\alpha+\beta} - e^{-\alpha-\beta}}{2} = \sinh(\alpha+\beta) = (\text{左辺})
\end{aligned}$$