数学演習I　第3回　図形と三角比

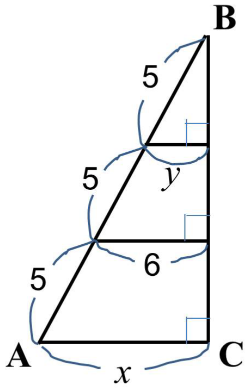
2015年4月22日　担当：佐藤 純

問題1 右図について以下の問いに答えよ．

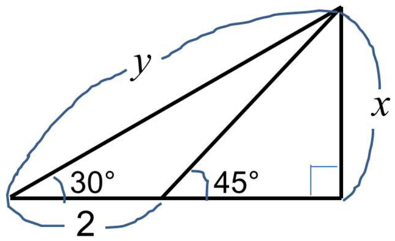
(1-1) x と y の値を求めよ．
$10:6=15:x=5:y$ より，$x=9,\ y=3$.

(1-2) $\sin A, \cos A, \tan A$ を求めよ．
$\mathrm{BC}=\sqrt{15^2-9^2}=12$.
$\sin A=\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}}=\frac{4}{5}$,
$\cos A=\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}}=\frac{3}{5}$,
$\tan A=\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}}=\frac{4}{3}$.

(1-3) $\sin B, \cos B, \tan B$ を求めよ．
$\sin B=\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}}=\frac{3}{5}$,
$\cos B=\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}}=\frac{4}{5}$,
$\tan B=\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BC}}=\frac{3}{4}$.



問題2 下図について，x と y の値を求めよ．



底辺$=2+x=\sqrt{3}x$ より，$x=\frac{2}{\sqrt{3}-1}=\frac{2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=\sqrt{3}+1,\ y=2x=2(\sqrt{3}+1)$.

問題3 右図について以下の問いに答えよ．
BD=AD とする．

(3-1) AB, BD, CD の長さを求めよ．
∠ADC=30° より，AD:AC:CD=2:1:$\sqrt{3}$ なので，AD=BD=6, CD=$3\sqrt{3}$.

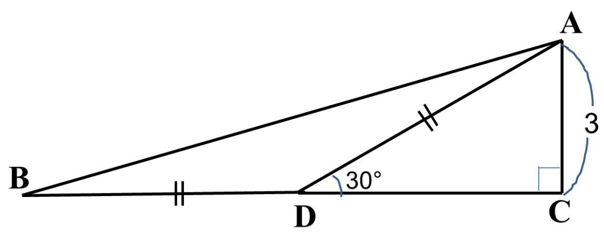
AB$=\sqrt{\mathrm{AC}^2+\mathrm{BC}^2}=\sqrt{9+(6+3\sqrt{3})^2}=\sqrt{72+36\sqrt{3}}=\sqrt{18}\sqrt{4+2\sqrt{3}}=3\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)=3(\sqrt{6}+\sqrt{2})$.

ここで，$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=(a+b)+2\sqrt{ab}$ より，$\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{(a+b)+2\sqrt{ab}}$ を使った．

(3-2) $\sin 15$ °, $\cos 15$ °の値を求めよ．
∠ADB=150°, AD=DB より ∠ABD=∠BAD なので，∠B=15° であるから，

$\sin 15^\circ=\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}}=\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$,

$\cos 15^\circ=\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}}=\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.



問題 4 $\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta$ のうちの一つが次のように与えられたとき，残りの二つを決定せよ．ただし，$0 < \theta < \pi/2$ とする．

$0 < \theta < \pi/2$ より，$\sin\theta > 0, \cos\theta > 0, \tan\theta > 0$ である．

(4-1) $\sin\theta = \frac{1}{3}, \qquad \cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta} = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \qquad \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$

(4-2) $\cos\theta = \frac{12}{13}, \qquad \sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \frac{5}{13}, \qquad \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{5}{12}.$

(4-3) $\tan\theta = 4, \qquad \cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} = \frac{1}{\sqrt{17}}, \qquad \sin\theta = \tan\theta\cos\theta = \frac{4}{\sqrt{17}}.$

$\left(1+\tan^2\theta = 1 + \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta} + \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}\right.$ より，$\left.\cos^2\theta = \frac{1}{1+\tan^2\theta}\right)$

問題 5 $0 < \theta < \pi$ のとき，次の等式を満たす θ を求めよ．

(5-1) $\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \qquad \theta = \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}$

(5-2) $\cos\theta = -\dfrac{1}{2} \qquad \theta = \dfrac{2\pi}{3}$

(5-3) $\tan\theta + 1 = 0 \qquad \tan\theta = -1$ より，$\theta = \dfrac{3\pi}{4}$

(5-4) $2\sin\theta - 1 = 0 \qquad \sin\theta = \frac{1}{2}$ より，$\theta = \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}$

問題 6 $\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{3}{2}$ のとき，$\sin\theta\cos\theta$ の値を求めよ．

$$
\begin{aligned}
&(\sin\theta+\cos\theta)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2, \\
&\sin^2\theta + \cos^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta = \frac{9}{4}, \\
&1 + 2\sin\theta\cos\theta = \frac{9}{4}, \\
&\sin\theta\cos\theta = \frac{5}{8}.
\end{aligned}
$$

問題 7

(7-1) △ABC で，A=45 ,° B=60 ,° AC=$3\sqrt{6}$ であるとき，BC の長さを求めよ．

正弦定理より，$\dfrac{\mathrm{AC}}{\sin B} = \dfrac{\mathrm{BC}}{\sin A}$ なので，

BC=AC$\dfrac{\sin A}{\sin B} = 3\sqrt{6}\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 6.$

(7-2) △ABC で，C=60 ,° BC=4 , AC=$5\sqrt{6}$ であるとき，AB の長さを求めよ．

余弦定理より $\mathrm{AB}^2 = \mathrm{AC}^2+\mathrm{BC}^2-2\mathrm{AC}\cdot\mathrm{BC}\cos C = 166-20\sqrt{6}$ なので，AB=$\sqrt{166-20\sqrt{6}}$.

(7-3) １辺の長さが $\sqrt{6}$ の正四面体の体積を求めよ．

正四面体の 4 頂点を ABCD とする．正三角形 △BCD を底面とする．辺 CD の中点を E とすると，BE=$\frac{3}{2}\sqrt{2}$ なので，底面積 $S = $ △BCD=$\sqrt{6}\times\frac{3}{2}\sqrt{2}\times\frac{1}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{3}$ となる．

次に，正四面体の高さ h を求める．頂点 A から底面 △BCD に下ろした垂線の足を H とする．三角形 ABH を考えると，∠H=90 °の直角三角形であり，AB=$\sqrt{6}$, BH=$\sqrt{2}$ なので，$h = \mathrm{AH} = 2$ となる．

以上により，正四面体の体積は V は, $V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3}\frac{3}{2}\sqrt{3}\times 2 = \sqrt{3}$ となる．