数学I　第3回　三角関数

2015年4月22日　　担当：佐藤 純

$\boxed{\textbf{問題 1}}$ オイラーの公式 $e^{\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i}\sin x$ を使って、以下の式を証明せよ。

(1-1) $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$
$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$$\begin{aligned} e^{\mathrm{i}(\alpha+\beta)} &= e^{\mathrm{i}\alpha}e^{\mathrm{i}\beta} = (\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha)(\cos\beta + \mathrm{i}\sin\beta) \\ &= (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + \mathrm{i}(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta) \end{aligned}$$

一方、$e^{\mathrm{i}(\alpha+\beta)} = \cos(\alpha+\beta) + \mathrm{i}\sin(\alpha+\beta)$ なので、

$$\cos(\alpha+\beta) + \mathrm{i}\sin(\alpha+\beta) = (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + \mathrm{i}(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)$$

である。これの実部と虚部を比べて与式を得る。

(1-2) $\cos nx + \mathrm{i}\sin nx = (\cos x + \mathrm{i}\sin x)^n$

$$\cos nx + \mathrm{i}\sin nx = e^{\mathrm{i}nx} = \left(e^{\mathrm{i}x}\right)^n = (\cos x + \mathrm{i}\sin x)^n$$

$\boxed{\textbf{問題 2}}$ 次の極限値を求めよ。

(2-1) $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x} = \lim_{x\to 0} 4\frac{\sin 4x}{4x} = 4\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x} = 4$

(2-2) $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 2x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{3}{2}\frac{\sin 3x}{3x}\frac{2x}{\sin 2x}\right) = \frac{3}{2}\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin 2x}\right) = \frac{3}{2}\times 1\times 1 = \frac{3}{2}$

(2-3)

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\sin x} &= \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x\sin x(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x\sin x(1+\cos x)} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\frac{1}{1+\cos x} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(2-4) $\displaystyle \lim_{x\to \pi}\frac{\sin 3x}{\sin 2x}$
$x = y + \pi$ とおくと、$x \to \pi$ のとき、$y \to 0$ なので、

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin 3x}{\sin 2x} = \lim_{y\to 0}\frac{\sin 3(y+\pi)}{\sin 2(y+\pi)} = -\lim_{y\to 0}\frac{\sin 3y}{\sin 2y} = -\frac{3}{2}$$

(2-5) $\displaystyle \lim_{x\to \pi/2}\frac{x-\pi/2}{\cos x}$
$x = y + \pi/2$ とおくと、$x \to \pi/2$ のとき、$y \to 0$ なので、

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{x-\pi/2}{\cos x} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\cos(y+\pi/2)} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{-\sin y} = -1$$

ここで、極限値

$$\frac{\sin x}{x} = 1$$

を使った。

問題 3

(3-1) 関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ の定義式を書け。

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

(3-2) $f(x) = \sin x$ の導関数を、上の定義式にしたがって計算せよ。

$$\begin{aligned}(\sin x)' &= \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} \\ &= \sin x \lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h}\end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned}\lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{(\cos h - 1)(\cos h + 1)}{h(\cos h + 1)} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\cos^2 h - 1}{h(\cos h + 1)} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{-\sin^2 h}{h(\cos h + 1)} \\ &= -\left(\lim_{h \to 0} \sin h\right)\left(\lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h}\right)\left(\lim_{h \to 0} \frac{1}{\cos h + 1}\right) \\ &= -0 \times 1 \times \frac{1}{2} = 0\end{aligned}$$

より、

$$(\sin x)' = \cos x$$

(3-3) $f(x) = \cos x$ の導関数を、上の定義式にしたがって計算せよ。

$$\begin{aligned}(\cos x)' &= \lim_{h \to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h} \\ &= \cos x \lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} - \sin x \lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h}\end{aligned}$$

ここで、

$$\lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$$

より、

$$(\cos x)' = -\sin x$$