

数学演習 I 第 2 回 文字式, 因数分解, 方程式

2015 年 4 月 15 日 担当: 佐藤 純

問題 1 以下の計算をせよ。

$$(1-1) (x+2)(x-3) = x^2 - x - 6$$

$$(1-2) (x - \frac{1}{x})^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} - 2$$

$$(1-3) (x+y-2)^2 = x^2 + y^2 + 2xy - 4x - 4y + 4$$

$$(1-4) (x-2)^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$$

問題 2

(2-1) 整式 $2x^3 + x^2 - 4x + 3$ を $x+1$ で割った時の商 $Q(x)$ と余り $R(x)$ をそれぞれ求めよ。

$$Q(x) = 2x^2 - x - 3, R(x) = 6$$

(2-2) 整式 $x^4 - 2x^3 + x - 2$ を整式 $P(x)$ で割ると商が $x^2 + 1$, 余りが $3x - 1$ である。 $P(x)$ を求めよ。

$$x^4 - 2x^3 + x - 2 = P(x)(x^2 + 1) + (3x - 1),$$

$$P(x)(x^2 + 1) = (x^4 - 2x^3 + x - 2) - (3x - 1) = x^4 - 2x^3 - 2x - 1,$$

$$P(x) = \frac{x^4 - 2x^3 - 2x - 1}{x^2 + 1} = x^2 - 2x - 1.$$

問題 3

(3-1) $\frac{2a+b}{a} - \frac{a+2b}{b}$ を計算せよ。

$$\frac{2a+b}{a} - \frac{a+2b}{b} = \frac{2ab+b^2}{ab} - \frac{a^2+2ab}{ab} = \frac{(2ab+b^2) - (a^2+2ab)}{ab} = \frac{b^2-a^2}{ab}$$

(3-2) $\frac{1}{z} = x + y$, $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{3}$ のとき, z の値を求めよ。

$$\frac{1}{z} = x + y = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6},$$

$$z = \frac{6}{5}$$

(3-3) $\frac{1 - \frac{x+y}{x-y}}{1 + \frac{x+y}{x-y}}$ を簡単にせよ。

$$\frac{1 - \frac{x+y}{x-y}}{1 + \frac{x+y}{x-y}} = \frac{\left(1 - \frac{x+y}{x-y}\right)(x-y)}{\left(1 + \frac{x+y}{x-y}\right)(x-y)} = \frac{(x-y) - \frac{x+y}{x-y}(x-y)}{(x-y) + \frac{x+y}{x-y}(x-y)} = \frac{(x-y) - (x+y)}{(x-y) + (x+y)} = \frac{-2y}{2x} = -\frac{y}{x}$$

問題 4 以下の一次方程式を解け.

$$(4-1) \frac{1}{x} + 3 = 7$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} &= 7 - 3 = 4, \\ x &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$(4-2) \frac{5}{x+2} = \frac{3}{x}$$

$$\begin{aligned} 5x &= 3(x+2) = 3x+6, \\ 2x &= 6, \\ x &= 3 \end{aligned}$$

$$(4-3) x : (x+3) = 2 : 7$$

$$\begin{aligned} 7x &= 2(x+3) = 2x+6, \\ 5x &= 6, \\ x &= \frac{6}{5} \end{aligned}$$

問題 5 以下の連立方程式を解け.

(5-1)

$$\begin{cases} 2x + 4y = 10 \\ x + 3y = 7 \end{cases}$$

$$2x + 6y = 14 \text{ より, } (2x + 4y) - (2x + 6y) = 10 - 14, -2y = -4, y = 2, x = 7 - 3y = 1 \\ (x, y) = (1, 2)$$

(5-2)

$$\begin{cases} \frac{2}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{3} \\ \frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 1 \end{cases}$$

$$X = \frac{1}{x}, Y = \frac{1}{y} \text{ とおけば,}$$

$$\begin{cases} 2X - Y = \frac{1}{3} \\ X + 2Y = 1 \end{cases}$$

$$\text{これを解いて, } (X, Y) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \text{ なので, } (x, y) = (3, 3).$$

(5-3)

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + 3y + 4z = 13 \\ -x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

第1式と第3式を足して, $3y = 3$ より, $y = 1$.

これを第1式と第2式に代入して,

$$\begin{cases} x + z = 3 - y = 2 \\ 2x + 4z = 13 - 3y = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + z = 2 \\ x + 2z = 5 \end{cases}$$

これを解いて, $(x, y, z) = (-1, 1, 3)$.

問題6 以下の式を因数分解せよ.

(6-1) $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$

(6-2) $x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$

(6-3) $x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2)$

(6-4) $6x^2 - x - 2 = (2x + 1)(3x - 2)$

問題7 以下の二次方程式を解け.

(7-1) $x^2 + 3x + 2 = 0$ $(x + 1)(x + 2) = 0$ より, $x = -1, -2$.

(7-2) $x^2 + 3x + 1 = 0$ 解の公式より, $x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

(7-3) $x^2 + 4 = 0$ $x^2 = -4$ より, $x = \pm\sqrt{-4} = \pm 2i$.

(7-4) $x^2 + x + 1 = 0$ 解の公式より, $x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$.

問題8 二次方程式 $2x^2 + 4x - 3 = 0$ の解を α, β とするとき, 以下の値を求めよ.

$$2(x - \alpha)(x - \beta) = 2x^2 - 2(\alpha + \beta)x + 2\alpha\beta = 2x^2 + 4x - 3 \text{ より, } \alpha + \beta = -2, \alpha\beta = -\frac{3}{2}.$$

(8-1) $\alpha + \beta = -2$

(8-2) $\alpha\beta = -\frac{3}{2}$

(8-3) $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = (-2)^2 + 3 = 7$

(8-4) $\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta^2}{\alpha\beta} + \frac{\alpha^2}{\alpha\beta} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = \frac{7}{-\frac{3}{2}} = -\frac{14}{3}$