数学I　第2回　三角関数

2015年4月15日　担当：佐藤 純

問題1 以下の角度を、度数法のものは弧度法に、弧度法のものは度数法に換算せよ。

(1-1) $45^\circ = \dfrac{\pi}{4}$

(1-2) $270^\circ = \dfrac{3\pi}{2}$

(1-3) $\dfrac{2}{3}\pi = 120^\circ$

(1-4) $\dfrac{11}{6}\pi = 330^\circ$

問題2 次の値を求めよ。

(2-1) $\sin\dfrac{7}{6}\pi = -\dfrac{1}{2}$

(2-2) $\cos\dfrac{2}{3}\pi = -\dfrac{1}{2}$

(2-3) $\tan\dfrac{7}{4}\pi = -1$

(2-4) $\sin\dfrac{\pi}{8} = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

加法定理

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \tag{1}$$

において、$\alpha = \beta$ とおくと、

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \tag{2}$$

を得る。

$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ より、

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha \tag{3}$$

なので、

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}, \qquad \sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2} \tag{4}$$

を得る。

よって、

$$\sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \tag{5}$$

を得る。

(2-5) $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$$\begin{aligned}\cos\frac{\pi}{12} &= \sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{6}}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{2\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{(1+3)+2\sqrt{1\times 3}}}{2\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\end{aligned} \tag{6}$$

二重根号のはずし方：

$$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 = a+b+2\sqrt{ab} \tag{7}$$

より、

$$\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}} = \sqrt{a}+\sqrt{b} \tag{8}$$

別解：

$$\cos\frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \tag{9}$$

問題 3 以下の式を、$A\sin(x+\alpha)$ の形に表せ。

(3-1) $\sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

(3-2) $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

(3-3) $\sqrt{6}\sin x - \sqrt{2}\cos x = 2\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$
与式において、

$$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x\right) \tag{10}$$

と定数をくくり出すと、

$$A\sin(x+\alpha) = A\left(\cos\alpha\sin x + \sin\alpha\cos x\right) \tag{11}$$

なので、$A=\sqrt{a^2+b^2}$ であり、$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, を満たすような角度 α を見つければよい。

問題 4 $0 \le x \le \pi$ のとき、$\sin x + \cos x$ の最小値と最大値を求めよ。

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \tag{12}$$

$0 \leq x \leq \pi$ より $\dfrac{\pi}{4} \leq x + \dfrac{\pi}{4} \leq \dfrac{5\pi}{4}$ なので、$x + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$ のとき $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ は最大値 1 をとり、$x + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{5\pi}{4}$ のとき $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ は最小値 $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ をとる。

したがって、$x = \dfrac{\pi}{4}$ のとき $\sin x + \cos x$ は最大値 $\sqrt{2}$ をとり、$x = \pi$ のとき $\sin x + \cos x$ は最小値 -1 をとる。