数学II　中間試験　(1/2)

2014 年 11 月 11 日　担当：佐藤 純

問題 1 ⋆ (4 点 ×8=32 点)

以下の積分を計算せよ。

(1-1) $\displaystyle\int(3x^2+2x+1)\mathrm{d}x = x^3+x^2+x+C$

(1-2) $\displaystyle\int\left(\frac{1}{x^3}+\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x = -\frac{1}{2x^2}+\frac{2}{3}x\sqrt{x}+2\sqrt{x}+C$

(1-3)

$$\begin{aligned}\int\tan x\,\mathrm{d}x &= \int\frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x\\ &= -\int\frac{-\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x\\ &= -\int\frac{(\cos x)'}{\cos x}\,\mathrm{d}x\\ &= -\log|\cos x|+C\end{aligned}$$

(1-4)

$$\begin{aligned}\int\log x\,\mathrm{d}x &= \int(x)'\log x\,\mathrm{d}x\\ &= x\log x-\int x(\log x)'\,\mathrm{d}x\\ &= x\log x-\int x\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\\ &= x\log x-\int\mathrm{d}x\\ &= x\log x-x+C\end{aligned}$$

(1-5) $\displaystyle\int\frac{1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$

$\displaystyle\frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{(x+1)(x-1)}$ を部分分数分解する。

$\displaystyle\frac{1}{x^2-1}=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x-1}$ という形において、a と b を決定する。

$$\begin{aligned}\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x-1} &= \frac{a(x-1)+b(x+1)}{(x+1)(x-1)}\\ &= \frac{(a+b)x+(-a+b)}{x^2-1}\end{aligned}$$

となるので、恒等式 $1=(a+b)x+(-a+b)$ において係数を比較して、

$$\begin{aligned}a+b&=0\\ -a+b&=1\end{aligned}$$

を得る。これを解いて、$a=-1/2,\ b=1/2$ となるので結局、

$$\frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)$$

がわかる。

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\left(\log|x-1|-\log|x+1|\right)+C \\
&= \frac{1}{2}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C
\end{aligned}
$$

(1-6)

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x &= \int_0^\infty \left(-\frac{1}{2}\right)(-2x)e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^\infty \left(-\frac{1}{2}\right)(-x^2)'e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \left(-\frac{1}{2}\right)\left[e^{-x^2}\right]_0^\infty \\
&= \left(-\frac{1}{2}\right)(0-1) \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

(1-7)

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty xe^{-x}\,\mathrm{d}x &= \int_0^\infty x(-e^{-x})'\,\mathrm{d}x \\
&= \left[x(-e^{-x})\right]_0^\infty - \int_0^\infty (x)'(-e^{-x})\,\mathrm{d}x \\
&= -\left[xe^{-x}\right]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x}\,\mathrm{d}x \\
&= -\left[xe^{-x}\right]_0^\infty - \left[e^{-x}\right]_0^\infty
\end{aligned}
$$

ここで、

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0, \\
&\lim_{x\to\infty} xe^{-x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{(x)'}{(e^x)'} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x} = 0, \\
&\lim_{x\to 0} xe^{-x} = 0\times 1 = 0
\end{aligned}
$$

より、

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty xe^{-x}\,\mathrm{d}x &= -\left[xe^{-x}\right]_0^\infty - \left[e^{-x}\right]_0^\infty \\
&= (0-0)-(0-1) = 1
\end{aligned}
$$

(1-8)

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^\infty e^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty (-e^{-x})'\sin x\,\mathrm{d}x = \left[-e^{-x}\sin x\right]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x}\cos x\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^\infty e^{-x}\cos x\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty (-e^{-x})'\cos x\,\mathrm{d}x \\
&= \left[-e^{-x}\cos x\right]_0^\infty - \int_0^\infty e^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x = 1-I
\end{aligned}
$$

より、$I = 1-I$ なので $I = \dfrac{1}{2}$ を得る。

$\boxed{\textbf{問題 2}}$ ⋆ (4 点 ×2=8 点)

(2-1) $|x| < 1$ のとき、等比級数の公式 $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \cdots$ を示せ。

等比級数の公式：

$S = 1 + t + t^2 + \cdots + t^{N-1}$ とおくと、

$$S = 1 + t + t^2 + \cdots + t^{N-1}$$
$$tS = t + t^2 + \cdots + t^{N-1} + t^N$$

この２式を辺々引き算すると

$$(1-t)S = 1 - t^N$$

となるので、

$$S = \frac{1-t^N}{1-t}$$

を得る。ここで、$|t| < 1$ ならば $\lim_{N\to\infty} t^N = 0$ なので、

$$1 + t + t^2 + \cdots = \frac{1}{1-t} \tag{1}$$

を得る。

式 (1) において、$t = -x$ とすることにより、与式を得る。

(2-2) 上式の両辺を不定積分することにより、

対数関数のマクローリン展開 $\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots$ を示せ。

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x} = \int (1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \cdots)\mathrm{d}x,$$
$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{6}x^6 + \cdots$$

$\boxed{\textbf{問題 3}}$ ⋆ (4 点 ×2=8 点)

(3-1) 極方程式 $r = 2 + \cos\theta\,(-\pi \le \theta < \pi)$ で表される閉曲線が囲む面積を求めよ。

$$\begin{aligned}
S &= \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\theta \frac{1}{2} r^2 \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\theta \frac{1}{2} (2 + \cos\theta)^2 \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\theta \frac{1}{2} \left(4 + 4\cos\theta + \cos^2\theta\right) \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\theta \frac{1}{2} \left(4 + 4\cos\theta + \frac{1+\cos 2\theta}{2}\right) \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\theta \left(\frac{9}{4} + 2\cos\theta + \frac{1}{4}\cos 2\theta\right) \\
&= \left[\frac{9}{4}\theta + 2\sin\theta + \frac{1}{8}\sin 2\theta\right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{9}{2}\pi.
\end{aligned}$$

(3-2) 底面積 S, 高さ h の円錐の体積 V を求めよ。(答えのみは不可、積分計算せよ)
高さ z における円錐の断面積 $f(z)$ は、

$$f(z) = \frac{S}{h^2}(h-z)^2$$

で与えられるので、体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \int_0^h \mathrm{d}z f(z) \\ &= \frac{S}{h^2}\int_0^h \mathrm{d}z (h-z)^2 \\ &= \frac{S}{h^2}\left[-\frac{1}{3}(h-z)^3\right]_0^h \\ &= \frac{hS}{3} \end{aligned}$$

となる。

問題 4 $\star$ (4 点 ×4=16 点)

以下の微分方程式を、与えられた初期条件のもとに解け。

(4-1) $y' = 2y \qquad (x,y) = (0,3)$
$y' = 2y$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2y, \quad \frac{\mathrm{d}y}{y} = 2\mathrm{d}x, \quad \int \frac{\mathrm{d}y}{y} = 2\int \mathrm{d}x, \quad \log|y| = 2x + A, \quad |y| = e^{2x+A} = e^A e^{2x},$$
$$y = \pm e^A e^{2x}, \quad y = Be^{2x}$$

一般解 $y = Be^{3x}$ に $(x,y) = (0,3)$ を代入して、$B = 3$ を得るので、$\boxed{y = 3e^{2x}}$ となる。

(4-2) $yy' = x \qquad (x,y) = (0,2)$

$$y\mathrm{d}y = x\mathrm{d}x, \quad \int y\mathrm{d}y = \int x\mathrm{d}x, \quad \frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}x^2 + A, \quad x^2 - y^2 = B$$

一般解 $x^2 - y^2 = B$ に $(x,y) = (0,2)$ を代入して、$B = -4$ を得るので、$\boxed{x^2 - y^2 + 4 = 0}$ となる。

(4-3) $y' = \dfrac{x-y}{x+y} \qquad (x,y) = (0,0)$

$$y' = \frac{x-y}{x+y} = \frac{1-\frac{y}{x}}{1+\frac{y}{x}}.$$

ここで、$z = \frac{y}{x}$ とおくと、$y = zx$ の両辺を x で微分して、$y' = z'x + z$ である。よって、

$$\begin{aligned} z'x + z &= \frac{1-z}{1+z}, \\ z'x &= \frac{1-z}{1+z} - z = \frac{1-2z-z^2}{1+z}, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x}\frac{1-2z-z^2}{1+z},\\
&\int \frac{1+z}{1-2z-z^2}\mathrm{d}z = \int \frac{\mathrm{d}x}{x},\\
&-\frac{1}{2}\log|1-2z-z^2| = \log|x| + C,\\
&\log|1-2z-z^2| = -2\log|x| - 2C = \log\frac{1}{x^2} - 2C,\\
&1-2z-z^2 = \frac{A}{x^2},\\
&x^2-2xy-y^2 = A
\end{aligned}
$$

を得る。初期条件より $A=0$ なので、$x^2-2xy-y^2=0$ となる。

(4-4) $y'-2y=e^x \qquad (x,y)=(0,0)$

右辺をゼロにおいた、$y'-2y=0$ をまず解く。これは変数分離形なので、

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2y,\\
&\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int 2\mathrm{d}x,\\
&\log|y| = 2x + C,\\
&y = Ae^{2x}
\end{aligned}
$$

と解ける。ここで、A は積分定数であるが、x の関数 $A(x)$ であるとみなして (定数変化法)、もとの微分方程式に代入すると、

$$
\begin{aligned}
&A'e^{2x} + 2Ae^{2x} - 2Ae^{2x} = e^x,\\
&A' = e^{-x}
\end{aligned}
$$

と A に対する微分方程式が得られる。これを積分して

$$A = -e^{-x} + C$$

と A が求まる。これを $y=Ae^{2x}$ に代入して、$y=Ce^{2x}-e^x$ を得る。初期条件より $C=1$ なので、

$$y = e^{2x} - e^x$$

となる。

$\boxed{\textbf{問題 5}}$ $\star$ (4 点 ×2=8 点)

(5-1) 置換 $t = x+\sqrt{x^2+1}$ を用いて、不定積分 $\int\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x$ を計算せよ。

置換 $t = x+\sqrt{x^2+1}$ を用いて、

$$
\begin{aligned}
&t-x = \sqrt{x^2+1},\\
&(t-x)^2 = x^2+1,\\
&t^2-2tx = 1,\\
&x = \frac{t^2-1}{2t} = \frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right),
\end{aligned}
$$

$$\sqrt{x^2+1} = t - x = t - \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right) = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right),$$
$$\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)' \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2t}\left(t + \frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$$

以上より、

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right)\frac{1}{2t}\left(t + \frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t \\ &= \int \frac{1}{4}\left(t + \frac{2}{t} + \frac{1}{t^3}\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{8}t^2 + \frac{1}{2}\log|t| - \frac{1}{8t^2} + C \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right) \times \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right) + \frac{1}{2}\log|t| + C \\ &= \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2}\log(x + \sqrt{x^2+1}) + C\end{aligned}$$

となる。

(5-2) 置換 $t = \tan\dfrac{x}{2}$ を用いて、不定積分 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x}$ を計算せよ。
置換 $t = \tan\frac{x}{2}$

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \mathrm{d}x = \frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}$$

を用いて、

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x} &= \int \frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}}\frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2} = \int \frac{2\mathrm{d}t}{(1+t)^2} = -\frac{2}{1+t} + C = \frac{2t}{1+t} + C' \\ &= \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan\frac{x}{2}} + C' = \frac{2\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}} + C'\end{aligned}$$

を得る。

問題 6 ⋆⋆ (4 点 ×3=12 点)
直線 $y = 1 - x$ と、放物線 $y = 1 - x^2$ で囲まれる領域を D とする。

(6-1) 領域 D の面積を求めよ。

$$S = \int_0^1 (y_2 - y_1)\mathrm{d}x = \int_0^1 \{(1-x^2) - (1-x)\}\mathrm{d}x = \int_0^1 (x - x^2)\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{6}$$

(6-2) 領域 D を x 軸の周りに回転させてできる立体の体積を求めよ。

$$\begin{aligned}V &= \int_0^1 (\pi y_2^2 - \pi y_1^2)\mathrm{d}x = \int_0^1 \{\pi(1-x^2)^2 - \pi(1-x)^2\}\mathrm{d}x = \pi\int_0^1 (x^4 - 3x^2 + 2x)\mathrm{d}x \\ &= \pi\left[\frac{1}{5}x^5 - x^3 + x^2\right]_0^1 \\ &= \frac{\pi}{5}\end{aligned}$$

(6-3) 領域 D の周囲の長さを求めよ。

$$\ell_1 = \sqrt{2},$$
$$\ell_2 = \int_0^1 \sqrt{1+(y_2')^2}\mathrm{d}x = \int_0^1 \sqrt{1+\{(1-x^2)'\}^2}\mathrm{d}x = \int_0^1 \sqrt{1+4x^2}\mathrm{d}x$$

ここで、$t = 2x$ とおくと、

$$\ell_2 = \frac{1}{2}\int_0^2 \sqrt{1+t^2}\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{4}t\sqrt{t^2+1} + \frac{1}{4}\log(t+\sqrt{t^2+1})\right]_0^2 = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4}\log\left(2+\sqrt{5}\right)$$

なので、

$$\ell = \ell_1 + \ell_2 = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4}\log\left(2+\sqrt{5}\right)$$

問題 7 $\star\star\star$ (4 点 ×2=8 点)

オイラーの定数 γ は、極限値

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\log(n+1)\right)$$

で定義される。

(7-1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{1}{k}\right) = \log(n+1)$ を示せ。

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{1}{k}\right) &= \sum_{k=1}^{n}\log\frac{k+1}{k} = \sum_{k=1}^{n}\{\log(k+1)-\log k\} \\ &= (\log 2 - \log 1) + (\log 3 - \log 2) + (\log 4 - \log 3) + \cdots + \{\log(n+1) - \log n\} \\ &= \log(n+1)\end{aligned}$$

(7-2) 問題 (2-2), (7-1) の結果を用いて、オイラーの定数 γ が

$$\gamma = \frac{1}{2}\zeta(2) - \frac{1}{3}\zeta(3) + \frac{1}{4}\zeta(4) - \frac{1}{5}\zeta(5) + \frac{1}{6}\zeta(6) - \frac{1}{7}\zeta(7) + \cdots$$

と表されることを示せ。

ただし、$\zeta(s)$ はリーマンのゼータ関数 $\zeta(s) = 1 + \dfrac{1}{2^s} + \dfrac{1}{3^s} + \dfrac{1}{4^s} + \cdots$ である。

$$\begin{aligned}\gamma &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\log(n+1)\right) \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\log\left(1+\frac{1}{k}\right)\right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\log\left(1+\frac{1}{k}\right)\right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{k}-\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{2}\frac{1}{k^2}+\frac{1}{3}\frac{1}{k^3}-\frac{1}{4}\frac{1}{k^4}+\frac{1}{5}\frac{1}{k^5}-\cdots\right)\right\}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} - \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3} + \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4} - \frac{1}{5}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^5} + \cdots \\
&= \frac{1}{2}\zeta(2) - \frac{1}{3}\zeta(3) + \frac{1}{4}\zeta(4) - \frac{1}{5}\zeta(5) + \cdots
\end{aligned}
$$

問題 8 $\star\star\star\star$ (4 点 $\times 2 = 8$ 点)

(8-1) 定積分に読み替えることによって、極限値

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}$$

を計算せよ。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}} = \int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

(8-2) 置換 $x = \tan\theta$ を用いて、定積分

$$\int_0^1 \frac{\log(x+1)}{x^2+1}\mathrm{d}x$$

を計算せよ。

$x^2+1 = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$, $\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\cos^2\theta} = (x^2+1)\mathrm{d}\theta$,

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\log(x+1)}{x^2+1}\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(1+\tan\theta)\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta}\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\log(\cos\theta+\sin\theta) - \log\cos\theta\right)\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\log\left[\sqrt{2}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\right] - \log\cos\theta\right)\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}\log 2\mathrm{d}\theta + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}\theta - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\cos\theta\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}\log 2\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{\pi}{8}\log 2.
\end{aligned}
$$