数学II　中間試験　(1/2)

2014年11月11日　担当：佐藤 純

問題1 ⋆ (4点 ×8=32点)

以下の積分を計算せよ。

(1-1) $\displaystyle\int (3x^2+2x+1)\mathrm{d}x$

(1-2) $\displaystyle\int \left(\frac{1}{x^3}+\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x$

(1-3) $\displaystyle\int \tan x\,\mathrm{d}x$

(1-4) $\displaystyle\int \log x\,\mathrm{d}x$

(1-5) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-1}$

(1-6) $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x$

(1-7) $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x}\,\mathrm{d}x$

(1-8) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x$

問題2 ⋆ (4点 ×2=8点)

(2-1) $|x|<1$ のとき、等比級数の公式 $\displaystyle\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+\cdots$ を示せ。

(2-2) 上式の両辺を不定積分することにより、
対数関数のマクローリン展開 $\displaystyle\log(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\cdots$ を示せ。

問題3 ⋆ (4点 ×2=8点)

(3-1) 極方程式 $r=2+\cos\theta\,(-\pi\leq\theta<\pi)$ で表される閉曲線が囲む面積を求めよ。

(3-2) 底面積 S, 高さ h の円錐の体積 V を求めよ。(答えのみは不可、積分計算せよ)

問題4 ⋆ (4点 ×4=16点)

以下の微分方程式を、与えられた初期条件のもとに解け。

(4-1) $y'=2y$　　$(x,y)=(0,3)$

(4-2) $yy'=x$　　$(x,y)=(0,2)$

(4-3) $\displaystyle y'=\frac{x-y}{x+y}$　　$(x,y)=(0,0)$

(4-4) $y'-2y=e^x$　　$(x,y)=(0,0)$

問題5 ⋆ (4点 ×2=8点)

(5-1) 置換 $t=x+\sqrt{x^2+1}$ を用いて、不定積分 $\displaystyle\int\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x$ を計算せよ。

(5-2) 置換 $\displaystyle t=\tan\frac{x}{2}$ を用いて、不定積分 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x}$ を計算せよ。

問題 6 $\star\star$ (4 点 ×3=12 点)

直線 $y = 1 - x$ と、放物線 $y = 1 - x^2$ で囲まれる領域を D とする。

(6-1) 領域 D の面積を求めよ。

(6-2) 領域 D を x 軸の周りに回転させてできる立体の体積を求めよ。

(6-3) 領域 D の周囲の長さを求めよ。

問題 7 $\star\star\star$ (4 点 ×2=8 点)

オイラーの定数 γ は、極限値

$$\gamma = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log(n+1) \right)$$

で定義される。

(7-1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \log\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \log(n+1)$ を示せ。

(7-2) 問題 (2-2), (7-1) の結果を用いて、オイラーの定数 γ が

$$\gamma = \frac{1}{2}\zeta(2) - \frac{1}{3}\zeta(3) + \frac{1}{4}\zeta(4) - \frac{1}{5}\zeta(5) + \frac{1}{6}\zeta(6) - \frac{1}{7}\zeta(7) + \cdots$$

と表されることを示せ。

ただし、$\zeta(s)$ はリーマンのゼータ関数 $\zeta(s) = 1 + \dfrac{1}{2^s} + \dfrac{1}{3^s} + \dfrac{1}{4^s} + \cdots$ である。

問題 8 $\star\star\star\star$ (4 点 ×2=8 点)

(8-1) 定積分に読み替えることによって、極限値

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$$

を計算せよ。

(8-2) 置換 $x = \tan\theta$ を用いて、定積分

$$\int_0^1 \frac{\log(x+1)}{x^2+1} \mathrm{d}x$$

を計算せよ。