数学 II　期末試験

2015 年 01 月 23 日　　担当：佐藤 純

1. 反応速度定数 k の化学反応 $A+B\to C$ を考える。
時刻 $t=0$ での A, B の濃度を N とし, C の濃度を 0 とする。

(1) 時刻 t での C の濃度 $x(t)$ が満たす微分方程式を書け。
化学反応で C が x だけ生成されたとき、A, B の濃度は $N-x$ である。C の生成速度 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ は A の濃度 $N-x$ と B の濃度 $N-x$ の積 $(N-x)^2$ に比例し、その比例定数が反応速度定数 k であるので、

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=k(N-x)^2}$$

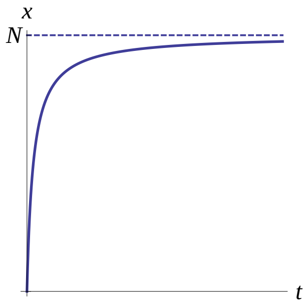
となる。

(2) この微分方程式を解いて $x(t)$ を求め、グラフを描け。

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(N-x)^2}=\int k\mathrm{d}t,\qquad \frac{1}{N-x}=kt+A$$

ここで、初期条件 $x(0)=0$ より、$A=1/N$ なので、

$$\frac{1}{N-x}=kt+\frac{1}{N},\qquad \boxed{x(t)=N\left(1-\frac{1}{Nkt+1}\right)}$$



2. x の関数 y に対する以下の微分方程式の一般解を求めよ。

(1) $y''+4y=0$
指数関数型の解 $y=e^{\lambda x}$ を仮定して微分方程式に代入すると、

$$\begin{aligned}&\lambda^2e^{\lambda x}+4e^{\lambda x}=0,\\&e^{\lambda x}(\lambda^2+4)=0,\\&\lambda^2+4=0,\\&\lambda=\pm 2\mathrm{i}\end{aligned}$$

を得る。これを $y=e^{\lambda x}$ に代入して、2 つの独立解 $y=e^{2\mathrm{i}x}$, $y=e^{-2\mathrm{i}x}$ を得る。よって、この微分方程式の一般解は

$$\boxed{y=Ae^{2\mathrm{i}x}+Be^{-2\mathrm{i}x}\quad (A,B\text{ は積分定数})}$$

となる。
あるいは、指数関数をオイラーの公式を使って三角関数に直すと、

$$\boxed{y=C\cos 2x+D\sin 2x\quad (C,D\text{ は積分定数})}$$

となる。ただし、$C=A+B$, $D=\mathrm{i}(A-B)$ とおいた。

(2) $y''+y'-6y=0$
同様に、特性方程式 $\lambda^2+\lambda-6=(\lambda+3)(\lambda-2)=0$ を解いて、$\lambda=2,-3$ より、一般解は

$$\boxed{y=Ae^{2x}+Be^{-3x}\quad (A,B\text{ は積分定数})}$$

となる。

3. **(1)** $z(x,y)=x^2y+xy^2$ に対し、全微分 $\mathrm{d}z$ を計算せよ。

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2xy+y^2,\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=x^2+2xy,$$
$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y=\boxed{(2xy+y^2)\mathrm{d}x+(x^2+2xy)\mathrm{d}y}$$

(2) $z(x,y)=e^{xy}$ に対し、$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ を示せ。

$$\frac{\partial z}{\partial x}=ye^{xy},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=xe^{xy},$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}(xe^{xy})=\boxed{(1+xy)e^{xy}}$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}(ye^{xy})=\boxed{(1+xy)e^{xy}}$$

4. 位置ベクトル $\vec{r}$ とその大きさ r を

$$\vec{r}=(x,y,z),\qquad r=|\vec{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

と書くとき、以下の量を計算せよ。

(1) $\boxed{\vec{\nabla}r=\dfrac{\vec{r}}{r}}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial r}{\partial x}&=\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2)^{1/2}\\&=\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}(x^2+y^2+z^2)'\\&=\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}2x\\&=x(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}\\&=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{x}{r}\end{aligned}$$

同様に、

$$\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r},\qquad \frac{\partial r}{\partial z}=\frac{z}{r}.$$

以上より、

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}r&=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)r\\&=\left(\frac{\partial r}{\partial x},\frac{\partial r}{\partial y},\frac{\partial r}{\partial z}\right)\\&=\left(\frac{x}{r},\frac{y}{r},\frac{z}{r}\right)\\&=\frac{1}{r}(x,y,z)=\frac{\vec{r}}{r}.\end{aligned}$$

(2) $\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{r}=3}$

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\cdot\vec{r}&=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(x,y,z)\\&=\frac{\partial}{\partial x}x+\frac{\partial}{\partial y}y+\frac{\partial}{\partial z}z\\&=1+1+1=3.\end{aligned}$$

(3) $\boxed{\vec{\nabla}\frac{1}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3}}$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r} &= \frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2)^{-1/2} \\
&= -\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}(x^2+y^2+z^2)' \\
&= -\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}2x \\
&= -x(x^2+y^2+z^2)^{-3/2} \\
&= -\frac{x}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3} = -\frac{x}{r^3}
\end{aligned}$$

同様に、

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{r} = -\frac{y}{r^3}, \quad \frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{r} = -\frac{z}{r^3}.$$

以上より、

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}\frac{1}{r} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{1}{r} \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r}, \frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{r}, \frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{r}\right) \\
&= \left(-\frac{x}{r^3}, -\frac{y}{r^3}, -\frac{z}{r^3}\right) \\
&= -\frac{1}{r^3}(x,y,z) = -\frac{\vec{r}}{r^3}.
\end{aligned}$$

(4) $\boxed{\Delta\frac{1}{r} = 0}$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{1}{r} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r}\right) \\
&= -\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{r^3} \\
&= -\frac{\partial}{\partial x}x(x^2+y^2+z^2)^{-3/2} \\
&= -(x^2+y^2+z^2)^{-3/2} + \frac{3}{2}x(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}2x \\
&= -\frac{1}{r^3} + \frac{3x^2}{r^5}
\end{aligned}$$

同様に、

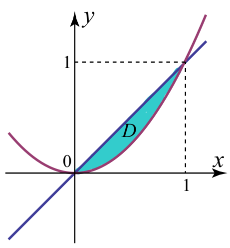
$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\frac{1}{r} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3y^2}{r^5}, \quad \frac{\partial^2}{\partial z^2}\frac{1}{r} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3z^2}{r^5}.$$

以上より、

$$\begin{aligned}
\Delta\frac{1}{r} &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\frac{1}{r} \\
&= \frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{1}{r} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\frac{1}{r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\frac{1}{r} \\
&= -\frac{3}{r^3} + \frac{3(x^2+y^2+z^2)}{r^5} \\
&= -\frac{3}{r^3} + \frac{3r^2}{r^5} = 0.
\end{aligned}$$

5. 2 次元 xy 平面内で、直線 $y = x$ と放物線 $y = x^2$ で囲まれる領域を D とするとき、二重積分 $\iint_D xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ を計算せよ。

領域 D は以下のような領域である：



$$\begin{aligned}
\iint_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^1 \mathrm{d}x \int_{x^2}^{x} \mathrm{d}y\ xy \\
&= \int_0^1 \mathrm{d}x \left[\frac{1}{2}xy^2\right]_{y=x^2}^{y=x} \\
&= \int_0^1 \mathrm{d}x \frac{1}{2}(x^3 - x^5) \\
&= \left[\frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{12}x^6\right]_{x=0}^{x=1} = \boxed{\frac{1}{24}}
\end{aligned}$$

6. 定積分 $\int_0^\infty e^{-x^2}\mathrm{d}x$ を計算せよ。

$I = \int_0^\infty e^{-x^2}\mathrm{d}x$ とし、I^2 を計算すると、

$$\begin{aligned}
I^2 &= \left(\int_0^\infty e^{-x^2}\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^\infty e^{-y^2}\mathrm{d}y\right) \\
&= \int_0^\infty \mathrm{d}x \int_0^\infty \mathrm{d}y\ e^{-(x^2+y^2)} \\
&= \int_0^\infty \mathrm{d}r \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta\ re^{-r^2} \\
&= \left(\int_0^\infty re^{-r^2}\mathrm{d}r\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\right) \\
&= -\frac{1}{2}\left[e^{-r^2}\right]_0^\infty [\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= -\frac{1}{2}(0-1)\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) \\
&= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

より、$I = \sqrt{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ を得る。

$$\boxed{\int_0^\infty e^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

7. $n! = 1\times2\times3\times\cdots\times(n-1)\times n$ は n が自然数 $(n = 1,2,3,\cdots)$ のときに定義されるが、以下の様に非自然数へと拡張できる。

(1) (自然数とは限らない)実数 t に対し、関数 $f(t)$ を定積分

$$f(t) = 2\int_0^\infty x^{2t+1}e^{-x^2}\mathrm{d}x \qquad (t > -1)$$

で定義する。自然数 n に対しては、$f(n) = n!$ が成り立つことを示せ。

$t > 0$ のとき、

$$\begin{aligned}
f(t) &= 2\int_0^\infty x^{2t+1}e^{-x^2}\mathrm{d}x \\
&= -\int_0^\infty x^{2t}\left(e^{-x^2}\right)'\mathrm{d}x \\
&= -\left[x^{2t}e^{-x^2}\right]_0^\infty + \int_0^\infty (x^{2t})'e^{-x^2}\mathrm{d}x \\
&= 2t\int_0^\infty x^{2t-1}e^{-x^2}\mathrm{d}x \\
&= tf(t-1)
\end{aligned}$$

より、自然数 n に対して

$$f(n) = nf(n-1) = n(n-1)f(n-2) = \cdots = n!f(0)$$

となる。ここで、

$$f(0) = 2\int_0^\infty xe^{-x^2}\mathrm{d}x = -\left[e^{-x^2}\right]_0^\infty = 1$$

より、$f(n) = n!$ を得る。

(2) この関係式 $n! = f(n)$ は n が自然数の場合に成り立つが、これを $n = \frac{1}{2}$ の場合に拡大解釈することによって、

$$\tfrac{1}{2}! = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

を示せ。

$$\tfrac{1}{2}! = f(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2}f(-\tfrac{1}{2}) = \int_0^\infty e^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$