数学 II　期末試験

2015 年 01 月 23 日　　担当：佐藤 純

1. 反応速度定数 k の化学反応 $A+B\to C$ を考える。
時刻 $t=0$ での A, B の濃度を N とし, C の濃度を 0 とする。

(1) 時刻 t での C の濃度 $x(t)$ が満たす微分方程式を書け。

(2) この微分方程式を解いて $x(t)$ を求め、グラフを描け。

2. x の関数 y に対する以下の微分方程式の一般解を求めよ。

(1) $y''+4y=0$　　**(2)** $y''+y'-6y=0$

3. **(1)** $z(x,y)=x^2y+xy^2$ に対し、全微分 $\mathrm{d}z$ を計算せよ。

(2) $z(x,y)=e^{xy}$ に対し、$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ を示せ。

4. 位置ベクトル $\overrightarrow{r}$ とその大きさ r を

$$\overrightarrow{r}=(x,y,z),\quad r=|\overrightarrow{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

と書くとき、以下の量を計算せよ。

(1) $\overrightarrow{\nabla}r$　　**(2)** $\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{r}$　　**(3)** $\overrightarrow{\nabla}\dfrac{1}{r}$　　**(4)** $\Delta\dfrac{1}{r}$

5. 2 次元 xy 平面内で、直線 $y=x$ と放物線 $y=x^2$ で囲まれる領域を D とするとき、二重積分 $\displaystyle\iint_D xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ を計算せよ。

6. 定積分 $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\mathrm{d}x$ を計算せよ。

7. $n!=1\times2\times3\times\cdots\times(n-1)\times n$ は n が自然数 $(n=1,2,3,\cdots)$ のときに定義されるが、以下の様に非自然数へと拡張できる。

(1) (自然数とは限らない)実数 t に対し、関数 $f(t)$ を定積分

$$f(t)=2\int_0^\infty x^{2t+1}e^{-x^2}\mathrm{d}x\qquad(t>-1)$$

で定義する。
自然数 n に対しては、$f(n)=n!$ が成り立つことを示せ。

(2) この関係式 $n!=f(n)$ は n が自然数の場合に成り立つが、これを $n=\frac{1}{2}$ の場合に拡大解釈することによって、

$$\tfrac{1}{2}!=\tfrac{\sqrt{\pi}}{2}$$

を示せ。