数学II　第15回　多重積分

2015年1月13日　担当：佐藤 純

問題1 以下の多重積分を計算せよ。

(1-1) $\displaystyle\iint_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \qquad D: 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x$

$$
\begin{aligned}
\iint_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^x \mathrm{d}y xy \\
&= \int_0^1 \mathrm{d}x \left[\frac{1}{2}xy^2\right]_{y=0}^{y=x} \\
&= \int_0^1 \mathrm{d}x \frac{1}{2}x^3 \\
&= \left[\frac{1}{8}x^4\right]_{x=0}^{x=1} \\
&= \frac{1}{8}
\end{aligned}
$$

(1-2) $\displaystyle\iint_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \qquad D: 0 \le x \le 1,\ x^2 \le y \le x$

$$
\begin{aligned}
\iint_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^1 \mathrm{d}x \int_{x^2}^x \mathrm{d}y\ y \\
&= \int_0^1 \mathrm{d}x \left[\frac{1}{2}y^2\right]_{y=x^2}^{y=x} \\
&= \int_0^1 \mathrm{d}x \frac{1}{2}(x^2 - x^4) \\
&= \left[\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{10}x^5\right]_{x=0}^{x=1} \\
&= \frac{1}{15}
\end{aligned}
$$

(1-3) $\displaystyle\iint_D (x+y)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \qquad D: x \ge 0, y \ge 0,\ x+y \le 1$

領域Dは、3点$(0,1)$, $(0,0)$, $(1,0)$を頂点とする三角形の内部である。

$$
\begin{aligned}
D &= \{x \ge 0, y \ge 0,\ x+y \le 1\} \\
&= \{0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1-x\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\iint_D (x+y)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} \mathrm{d}y(x+y)^2 \\
&= \int_0^1 \mathrm{d}x \left[\frac{1}{3}(x+y)^3\right]_{y=0}^{y=1-x} \\
&= \int_0^1 \mathrm{d}x \frac{1}{3}(1-x^3)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{3}\left[x - \frac{1}{4}x^4\right]_{x=0}^{x=1} \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

(1-4) $\displaystyle\iint_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \qquad D: y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 1$

領域 D は、中心 $(0,0)$, 半径 1 の上半円の内部である。

$$
\begin{aligned}
D &= \{y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 1\} \\
&= \{-1 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\iint_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y\ y \\
&= \int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\left[\frac{1}{2}y^2\right]_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}} \\
&= \int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\frac{1}{2}(1-x^2) \\
&= \frac{1}{2}\left[x - \frac{1}{3}x^3\right]_{x=-1}^{x=1} \\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

問題 2

定積分 $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\mathrm{d}x$ を計算せよ。

$\displaystyle I = \int_0^\infty e^{-x^2}\mathrm{d}x$ とし、I^2 を計算すると、

$$
\begin{aligned}
I^2 &= \left(\int_0^\infty e^{-x^2}\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^\infty e^{-y^2}\mathrm{d}y\right) \\
&= \int_0^\infty \mathrm{d}x\int_0^\infty \mathrm{d}y\ e^{-(x^2+y^2)} \\
&= \int_0^\infty \mathrm{d}r\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\ re^{-r^2} \\
&= \left(\int_0^\infty re^{-r^2}\mathrm{d}r\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\right) \\
&= -\frac{1}{2}\left[e^{-r^2}\right]_0^\infty [\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= -\frac{1}{2}(0-1)\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) \\
&= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}
$$

より、$\displaystyle I = \sqrt{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ を得る。

$$
\boxed{\int_0^\infty e^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}
$$