数学II　第14回　ベクトル解析

2014年12月24日　担当：佐藤 純

問題1 スカラー場 f とベクトル場 $\vec{g}$ が、

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2,$$
$$\vec{g}(x,y,z) = (x+y+z, xy+yz+zx, xyz)$$

で与えられているとき、以下の量を計算せよ。

(1-1) $\vec{\nabla} f$　　**(1-2)** $\vec{\nabla} \cdot \vec{g}$　　**(1-3)** $\vec{\nabla} \times \vec{g}$　　**(1-4)** Δf

問題2 位置ベクトルを

$$\vec{r} = (x,y,z)$$
$$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

と書くとき、以下の量を計算せよ。

(2-1) $\vec{\nabla} r$

(2-2) $\vec{\nabla} \cdot \vec{r}$

(2-3) $\vec{\nabla} \times \vec{r}$

(2-4) $\vec{\nabla} \dfrac{1}{r}$

(2-5) $\Delta \dfrac{1}{r}$

問題3 原点 $(0,0,0)$ に電荷 q があるときの電位は

$$\phi(x,y,z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

で与えられる。ただし、$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ である。

(3-1) 電場

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$$

を計算せよ。

(3-2) $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ を示せ。

(3-3) $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ を示せ。

問題4 以下の式を示せ

(4-1) $\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} f\right) = 0$

(4-2) $\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{f}\right) = 0$

(4-3) $\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{f}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{f}\right) - \Delta \vec{f}$