数学II　第13回　偏微分

2014年12月16日　担当：佐藤 純

問題1 2変数 (x,y) の関数 $z(x,y)$ が以下の式で与えられているとき、一次偏導関数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$ および全微分 $\mathrm{d}z$ を計算せよ。

(1-1) $z = 2x^2y - 3xy^3$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4xy - 3y^3,$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2x^2 - 9xy^2,$$
$$\mathrm{d}z = (4xy - 3y^3)\mathrm{d}x + (2x^2 - 9xy^2)\mathrm{d}y.$$

(1-2) $z = \sqrt{x^2+y^2}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{z},$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{z},$$
$$\mathrm{d}z = \frac{1}{z}(x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y).$$

(1-3) $z = e^{xy}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = yz,$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = xz,$$
$$\mathrm{d}z = z(y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y).$$

(1-4) $z = x\sin y$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \sin y,$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = x\cos y,$$
$$\mathrm{d}z = \sin y\mathrm{d}x + x\cos y\mathrm{d}y.$$

(1-5) $z = \log(x^2+y^2)$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y^2},$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{x^2+y^2},$$
$$\mathrm{d}z = \frac{2}{x^2+y^2}(x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y).$$

(1-6) $z = \dfrac{x-y}{x+y}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2y}{(x+y)^2},$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2x}{(x+y)^2},$$
$$\mathrm{d}z = \frac{2}{(x+y)^2}(y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y).$$

問題2 2変数 (x,y) の関数 $z(x,y)$ が以下の式で与えられているとき、二次偏導関数 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ を全て計算し、$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ が成り立つことを確かめよ。

(2-1) $z = 2x^2y - 3xy^3$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(4xy - 3y^3) = 4y,$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(2x^2 - 9xy^2) = -18xy,$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(2x^2 - 9xy^2) = 4x - 9y^2,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(4xy - 3y^3) = 4x - 9y^2.$$

(2-2) $z = e^{xy}$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}(ye^{xy}) = y^2 e^{xy}, \\
\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}(xe^{xy}) = x^2 e^{xy}, \\
\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}(xe^{xy}) = (1+xy)e^{xy}, \\
\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}(ye^{xy}) = (1+xy)e^{xy}.
\end{aligned}$$

問題 3 2 次元 xy 座標 (x, y) と 2 次元極座標 (r, θ) の関係式は、

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \tan^{-1} \dfrac{y}{x} \end{cases}$$

で与えられる。t を時刻とする物体の 2 次元運動を考える。

(3-1) 物体の速度ベクトル $\vec{v} = \left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)$ を $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}, \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ を用いて表せ。

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \cos\theta\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} - r\sin\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial y}{\partial \theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \sin\theta\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} + r\cos\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}
\end{aligned}$$

(3-2) 角速度 ω の等速円運動のとき、$\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = 0,\ \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \omega$ となる。このとき、

$$v = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2} = r\omega$$

となることを示せ。

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -r\omega\sin\theta, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = r\omega\cos\theta$$

より、

$$v = \sqrt{(-r\omega\sin\theta)^2 + (r\omega\cos\theta)^2} = r\omega$$

(3-3) 物体がポテンシャルエネルギー $U(x, y)$ の中を運動するとき、物体に働く力は

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}\right)$$

である。このとき、

$$\vec{F} \cdot \vec{r} = -r\frac{\partial U}{\partial r}$$

が成り立つことを示せ。ただし、位置ベクトルを

$$\vec{r} = (x, y)$$

と書いた。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial x} &= \frac{\partial U}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{x}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \left(-\frac{y}{x^2}\right)\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{x}{r}\frac{\partial U}{\partial r} - \frac{y}{r^2}\frac{\partial U}{\partial \theta} \\
\frac{\partial U}{\partial y} &= \frac{\partial U}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{y}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \left(\frac{1}{x}\right)\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{y}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{x}{r^2}\frac{\partial U}{\partial \theta}
\end{aligned}$$

より、

$$-\vec{F} \cdot \vec{r} = \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}\right) \cdot (x, y) = x\frac{\partial U}{\partial x} + y\frac{\partial U}{\partial y} = r\frac{\partial U}{\partial r}$$

を得る。