数学II　第13回　偏微分

2014年12月16日　担当：佐藤 純

問題1 2変数 (x,y) の関数 $z(x,y)$ が以下の式で与えられているとき、

一次偏導関数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$ および全微分 $\mathrm{d}z$ を計算せよ。

(1-1) $z = 2x^2y - 3xy^3$

(1-2) $z = \sqrt{x^2+y^2}$

(1-3) $z = e^{xy}$

(1-4) $z = x\sin y$

(1-5) $z = \log(x^2+y^2)$

(1-6) $z = \dfrac{x-y}{x+y}$

問題2 2変数 (x,y) の関数 $z(x,y)$ が以下の式で与えられているとき、

二次偏導関数 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ を全て計算し、

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ が成り立つことを確かめよ。

(2-1) $z = 2x^2y - 3xy^3$

(2-2) $z = e^{xy}$

問題3 2次元 xy 座標 (x,y) と2次元極座標 (r,θ) の関係式は、

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \tan^{-1}\dfrac{y}{x} \end{cases}$$

で与えられる。t を時刻とする物体の2次元運動を考える。

(3-1) 物体の速度ベクトル $\vec{v} = \left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)$ を $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}, \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ を用いて表せ。

(3-2) 角速度 ω の等速円運動のとき、$\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = 0, \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \omega$ となる。このとき、

$$v = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2} = r\omega$$

となることを示せ。

(3-3) 物体がポテンシャルエネルギー $U(x,y)$ の中を運動するとき、物体に働く力は

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}\right)$$

である。このとき、

$$\vec{F}\cdot\vec{r} = -r\frac{\partial U}{\partial r}$$

が成り立つことを示せ。ただし、位置ベクトルを

$$\vec{r} = (x,y)$$

と書いた。