数学II　第12回　微分方程式の応用II

2014年12月9日　担当：佐藤 純

問題1 バネ定数 k のバネの一端に質量 m のおもりを付け、摩擦のない滑らかな机の上に置いて、他端を固定する。

(1-1) おもりの運動方程式を立てよ。
バネが自然長（伸びも縮みもないときの長さ）のときのおもりの位置を $x=0$ とすると、バネがおもりに及ぼす力は $-kx$ と書けるので、運動方程式は

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -kx$$

となる。

(1-2) 指数関数型の解 $x(t)=e^{\lambda t}$ を仮定し、λ に対する方程式を導け。
$x(t)=e^{\lambda t}$ を運動方程式に代入すると、

$$\begin{aligned} m\lambda^2 e^{\lambda t} &= -ke^{\lambda t}, \\ m\lambda^2 &= -k \end{aligned}$$

と、λ に対する二次方程式が得られる。

(1-3) 上で求めた方程式から λ を決定し、一般解を求めよ。
上で求めた二次方程式を解くと、

$$\lambda = \pm \mathrm{i}\sqrt{\frac{k}{m}} = \pm \mathrm{i}\omega$$

となる。ただし、$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ とおいた。
これを $x(t)=e^{\lambda t}$ に代入して、二つの基本解 $x(t)=e^{\mathrm{i}\omega t},\, e^{-\mathrm{i}\omega t}$ が得られる。
よって、一般解はこれらの線形結合で、

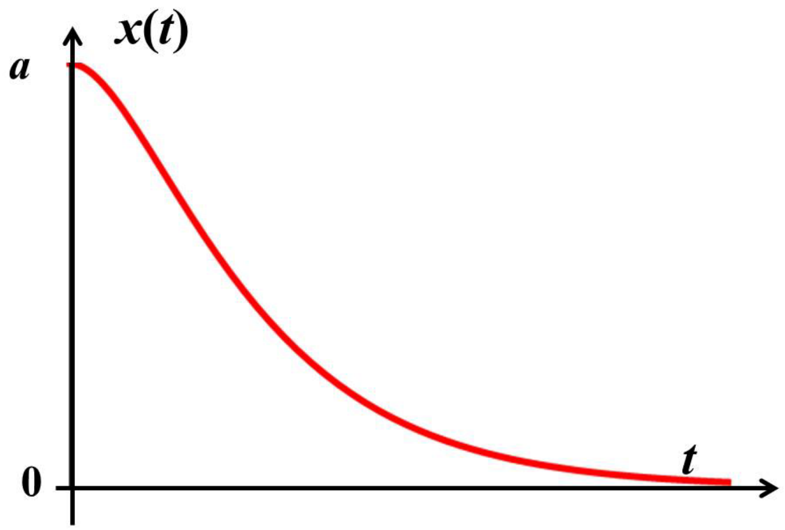
$$\begin{aligned} x(t) &= Ae^{\mathrm{i}\omega t} + Be^{-\mathrm{i}\omega t} \\ &= A(\cos\omega t + \mathrm{i}\sin\omega t) + B(\cos\omega t - \mathrm{i}\sin\omega t) \\ &= (A+B)\cos\omega t + \mathrm{i}(A-B)\sin\omega t \\ &= C\cos\omega t + D\sin\omega t \end{aligned}$$

となる。ただし、$C=A+B,\, D=\mathrm{i}(A-B)$ とおいた。

(1-4) バネを a だけ伸ばしておもりを静かに離した時、その後のおもりの運動を決定せよ。
初期条件は、$x(0)=a,\, v(0)=0$ となる。よって、$a = C\cos 0 + D\sin 0 = C$ より、$C=a$ を得る。また、$v(t)=x'(t) = -C\omega\sin\omega t + D\omega\cos\omega t$ より、$0 = -C\omega\sin 0 + D\omega\cos 0 = D\omega$ より、$D=0$ を得る。
したがって、

$$x(t) = a\cos\omega t$$

となる。



摩擦が強すぎて振動は起こらず、伸ばしたバネは無限の時間をかけて自然長に戻るだけで、縮むことはない。

問題 2 バネ定数 k のバネの一端に質量 m のおもりを付け、他端を固定する。おもりが机の上を動く際に、速度に比例した摩擦力が働くとし、比例定数を γ とする。

(2-1) おもりの運動方程式を立てよ。
バネが自然長（伸びも縮みもないときの長さ）のときのおもりの位置を $x = 0$ とすると、バネがおもりに及ぼす力は $-kx$、おもりに働く摩擦力は $-\gamma v$ と書けるので、運動方程式は

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - kx$$

となる。

(2-2) 指数関数型の解 $x(t) = e^{\lambda t}$ を仮定し、λ に対する方程式を導け。
$x(t) = e^{\lambda t}$ を運動方程式に代入すると、

$$m\lambda^2 e^{\lambda t} = -\gamma\lambda e^{\lambda t} - ke^{\lambda t},$$
$$m\lambda^2 + \gamma\lambda + k = 0$$

と、λ に対する二次方程式が得られる。

(2-3) バネを a だけ伸ばしておもりを静かに離した時、その後のおもりの運動を決定し、グラフで表せ。摩擦が十分に小さいときと大きいときで、場合分けすること。
式を綺麗にするため、$\beta = \dfrac{\gamma}{2m}$, $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ を導入すると、特性方程式は

$$\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega^2 = 0$$

となる。これを解くと、

$$\lambda = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega^2}$$

となる。

(1) 摩擦が大きいとき ($\beta > \omega$)
このとき、$\beta^2 - \omega^2 > 0$ より、$\omega_0 = \sqrt{\beta^2 - \omega^2}$ とおくと、$\lambda = -\beta \pm \omega_0$ となり、一般解は

$$x(t) = Ae^{(-\beta+\omega_0)t} + Be^{(-\beta-\omega_0)t} = e^{-\beta t}(Ae^{\omega_0 t} + Be^{-\omega_0 t})$$

となる。
初期条件は、$x(0) = a,\, v(0) = 0$ となる。よって、$a = A + B$ を得る。また、

$$v(t) = x'(t) = e^{-\beta t}\{(-\beta + \omega_0)Ae^{\omega_0 t} + (-\beta - \omega_0)Be^{-\omega_0 t}\}$$

より、

$$0 = v(0) = (-\beta + \omega_0)A + (-\beta - \omega_0)B$$

なので、

$$A = \frac{a}{2}\left(1 + \frac{\beta}{\omega_0}\right) \qquad B = \frac{a}{2}\left(1 - \frac{\beta}{\omega_0}\right)$$

を得る。
したがって、

$$x(t) = \frac{a}{2}e^{-\beta t}\left[\left(1 + \frac{\beta}{\omega_0}\right)e^{\omega_0 t} + \left(1 - \frac{\beta}{\omega_0}\right)e^{-\omega_0 t}\right]$$

となる。

(2) 摩擦が小さいとき ($\beta < \omega$)
このとき、$\omega^2 - \beta^2 > 0$ より、$\omega_0 = \sqrt{\omega^2 - \beta^2}$ とおくと、$\lambda = -\beta \pm \mathrm{i}\omega_0$ となり、一般解は

$$x(t) = Ae^{(-\beta + \mathrm{i}\omega_0)t} + Be^{(-\beta - \mathrm{i}\omega_0)t} = e^{-\beta t}(Ae^{\mathrm{i}\omega_0 t} + Be^{-\mathrm{i}\omega_0 t}) = e^{-\beta t}(C\cos\omega_0 t + D\sin\omega_0 t)$$

となる。ただし、$C = A + B,\, D = \mathrm{i}(A - B)$ とおいた。
初期条件は、$x(0) = a,\, v(0) = 0$ となる。よって、$a = C$ を得る。また、

$$v(t) = x'(t) = e^{-\beta t}\{(-\beta C + \omega_0 D)\cos\omega t + (-\beta D - \omega_0 C)\sin\omega t\}$$

より、

$$0 = v(0) = -\beta C + \omega_0 D$$

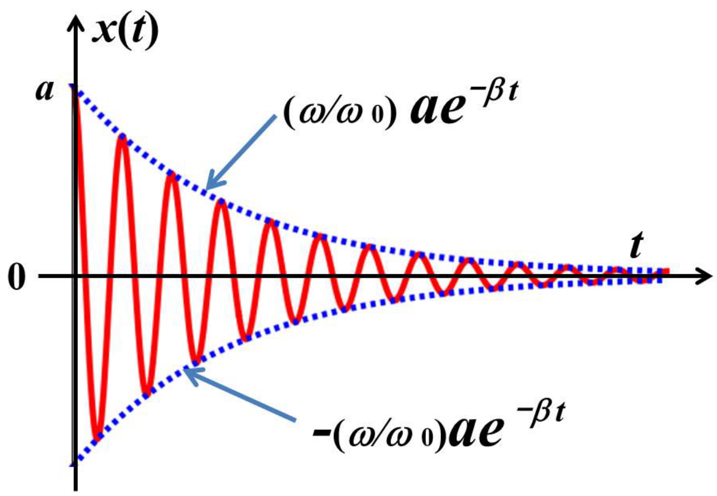
なので、

$$C = a \qquad D = \frac{\beta a}{\omega_0}$$

を得る。
したがって、

$$\begin{aligned} x(t) &= ae^{-\beta t}\left(\cos\omega_0 t + \frac{\beta}{\omega_0}\sin\omega_0 t\right) \\ &= \frac{\omega}{\omega_0}ae^{-\beta t}\sin(\omega_0 t + \theta), \quad \tan\theta = \omega_0/\beta \end{aligned}$$

となる。



微小な摩擦力によって減衰振動が起こる。