

問題1 以下の微分方程式の一般解を求めよ。

(1-1)  $y'' + y = 0$

指数関数型の解  $y = e^{\lambda x}$  を仮定する。これを微分すると  $y' = \lambda e^{\lambda x}$ ,  $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$  となる。これを微分方程式に代入すると、

$$\begin{aligned}\lambda^2 e^{\lambda x} + e^{\lambda x} &= 0, \\ e^{\lambda x}(\lambda^2 + 1) &= 0, \\ \lambda^2 + 1 &= 0, \\ \lambda &= \pm i\end{aligned}$$

を得る。ここで、 $e^{\lambda x} > 0$  であることを使った。

これを  $y = e^{\lambda x}$  に代入して、2つの独立解  $y = e^{ix}$ ,  $y = e^{-ix}$  を得る。よって、この微分方程式の一般解は

$$y = Ae^{ix} + Be^{-ix} \quad (A, B \text{ は積分定数}) \quad (1)$$

となる。

あるいは、指数関数をオイラーの公式を使って三角関数に直すと、

$$\begin{aligned}y &= Ae^{ix} + Be^{-ix} \\ &= A(\cos x + i \sin x) + B(\cos x - i \sin x) \\ &= (A + B) \cos x + i(A - B) \sin x \\ &= C \cos x + D \sin x \quad (C, D \text{ は積分定数})\end{aligned} \quad (2)$$

となる。ただし、 $C = A + B$ ,  $D = i(A - B)$  とおいた。

上の(1)式と(2)式は等価であり、どちらを使ってもよいが、初期値問題を解く際には(2)式の方が楽なことが多いので、以下の問題では断りなく(2)式の形に書き換えることもある。

(1-2)  $y'' - 9y = 0$

指数関数型の解  $y = e^{\lambda x}$  を仮定する。これを微分すると  $y' = \lambda e^{\lambda x}$ ,  $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$  となる。これを微分方程式に代入すると、

$$\begin{aligned}\lambda^2 e^{\lambda x} - 9e^{\lambda x} &= 0, \\ e^{\lambda x}(\lambda^2 - 9) &= 0, \\ \lambda^2 - 9 &= 0, \\ \lambda &= \pm 3\end{aligned}$$

を得る。ここで、 $e^{\lambda x} > 0$  であることを使った。

これを  $y = e^{\lambda x}$  に代入して、2つの独立解  $y = e^{3x}$ ,  $y = e^{-3x}$  を得る。よって、この微分方程式の一般解は

$$y = Ae^{3x} + Be^{-3x} \quad (A, B \text{ は積分定数})$$

となる。

(1-3)  $y'' + y' - 2y = 0$

指数関数型の解  $y = e^{\lambda x}$  を仮定する。これを微分すると  $y' = \lambda e^{\lambda x}$ ,  $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$  となる。これを微分方程式に代入すると、

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + \lambda e^{\lambda x} - 2e^{\lambda x} = 0,$$

$$e^{\lambda x}(\lambda^2 + \lambda - 2) = 0,$$

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0,$$

$$(\lambda + 2)(\lambda - 1) = 0,$$

$$\lambda = 1, -2$$

を得る。ここで、 $e^{\lambda x} > 0$  であることを使った。

これを  $y = e^{\lambda x}$  に代入して、2つの独立解  $y = e^x$ ,  $y = e^{-2x}$  を得る。よって、この微分方程式の一般解は

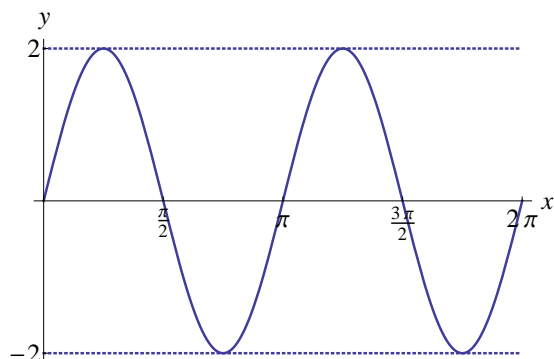
$$y = Ae^x + Be^{-2x} \quad (A, B \text{ は積分定数})$$

となる。

**問題 2** 以下の微分方程式を初期条件  $[x = 0 \text{ のとき } y = 0, y' = 4]$  のもとに解き、グラフの概形を描け。

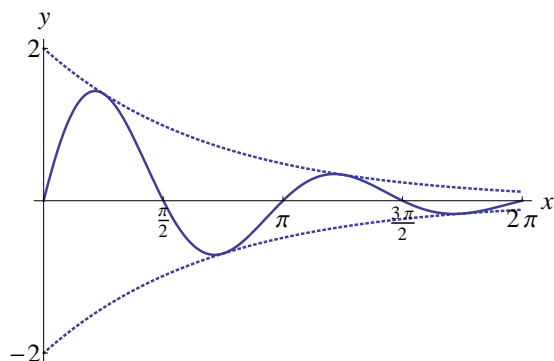
(2-1)  $y'' + 4y = 0$

特性方程式  $\lambda^2 + 4 = 0$  の解は  $\lambda = \pm 2i$  なので、一般解は  $y = A \cos 2x + B \sin 2x$  となる。これを微分すると  $y' = -2A \sin 2x + 2B \cos 2x$  となる。初期条件より、 $0 = A$ ,  $4 = 2B$  なので、 $y = 2 \sin 2x$  を得る。



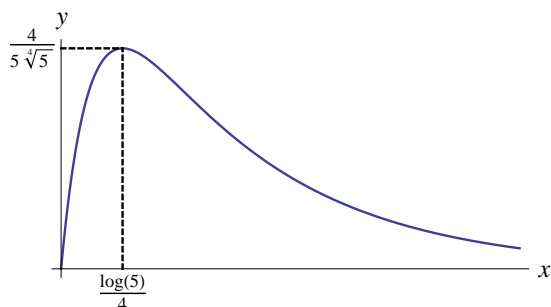
(2-2)  $y'' + 6y' + 13y = 0$

特性方程式  $\lambda^2 + 6\lambda + 13 = 0$  の解は  $\lambda = -3 \pm 2i$  なので、一般解は  $y = e^{-3x}(A \cos 2x + B \sin 2x)$  となる。これを微分すると  $y' = e^{-3x}(-3A \cos 2x - 3B \sin 2x - 2A \sin 2x + 2B \cos 2x)$  となる。初期条件より、 $0 = A$ ,  $4 = 2B$  なので、 $y = 2e^{-3x} \sin 2x$  を得る。



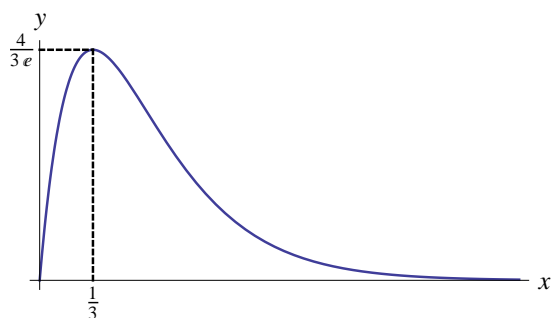
(2-3)  $y'' + 6y' + 5y = 0$

特性方程式  $\lambda^2 + 6\lambda + 5 = 0$  の解は  $\lambda = -1, -5$  なので、一般解は  $y = Ae^{-x} + Be^{-5x}$  となる。これを微分すると  $y' = -Ae^{-x} - 5Be^{-5x}$  となる。初期条件より、 $0 = A + B$ ,  $4 = -A - 5B$  なので、 $y = e^{-x} - e^{-5x}$  を得る。



(2-4)  $y'' + 6y' + 9y = 0$

特性方程式  $\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0$  の解は  $\lambda = -3$  (重解) なので、一般解は  $y = e^{-3x}(Ax + B)$  となる。これを微分すると  $y' = e^{-3x}(-3Ax - 3B + A)$  となる。初期条件より、 $0 = B$ ,  $4 = -3B + A$  なので、 $y = 4xe^{-3x}$  を得る。



**問題 3** 以下の微分方程式の一般解を求めよ。

(3-1)  $y'' + y' - 2y = x^2 + 2$

特性方程式  $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$  の解は  $\lambda = 1, -2$  なので、斉次方程式の一般解は  $y = Ae^x + Be^{-2x}$  となる。

次に、特解を求める。

$$y = ax^2 + bx + c \tag{3}$$

とおく。微分すると、

$$y' = 2ax + b, \quad y'' = 2a \tag{4}$$

なので、これらを元の微分方程式に代入して、

$$\begin{aligned} & 2a + (2ax + b) - 2(ax^2 + bx + c) \\ &= -2ax^2 + (2a - 2b)x + 2a + b - 2c \\ &= x^2 + 2 \end{aligned} \tag{5}$$

より、

$$-2a = 1, \quad 2a - 2b = 0, \quad 2a + b - 2c = 2 \tag{6}$$

を得る。これを解くと

$$(a, b, c) = (-1/2, -1/2, -7/4) \quad (7)$$

なので、特解は

$$y = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{7}{4} \quad (8)$$

となるので、求める一般解は、

$$y = Ae^x + Be^{-2x} - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{7}{4} \quad (9)$$

となる。

(3-2)  $y'' + y' - 2y = e^{2x}$

特性方程式  $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$  の解は  $\lambda = 1, -2$  なので、斉次方程式の一般解は  $y = Ae^x + Be^{-2x}$  となる。

次に、特解を求める。

$$y = ae^{2x} \quad (10)$$

とおく。微分すると、

$$y' = 2ae^{2x}, \quad y'' = 4ae^{2x} \quad (11)$$

なので、これらを元の微分方程式に代入して、

$$\begin{aligned} 4ae^{2x} + 2ae^{2x} - 2ae^{2x} &= 4ae^{2x} \\ &= e^{2x} \end{aligned} \quad (12)$$

より、

$$a = 1/4 \quad (13)$$

なので、特解は

$$y = \frac{1}{4}e^{2x} \quad (14)$$

となるので、求める一般解は、

$$y = Ae^x + Be^{-2x} + \frac{1}{4}e^{2x} \quad (15)$$

となる。

(3-3)  $y'' + y' - 2y = \sin x$

特性方程式  $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$  の解は  $\lambda = 1, -2$  なので、斉次方程式の一般解は  $y = Ae^x + Be^{-2x}$  となる。

次に、特解を求める。

$$y = a \sin x + b \cos x \quad (16)$$

とおく。微分すると、

$$y' = a \cos x - b \sin x, \quad y'' = -a \sin x - b \cos x \quad (17)$$

なので、これらを元の微分方程式に代入して、

$$\begin{aligned} & (-a \sin x - b \cos x) + (a \cos x - b \sin x) - 2(a \sin x + b \cos x) \\ &= (-3a - b) \sin x + (a - 3b) \cos x \\ &= \sin x \end{aligned} \tag{18}$$

より、

$$-3a - b = 1, \quad a - 3b = 0 \tag{19}$$

を得る。これを解くと

$$(a, b) = (-3/10, -1/10) \tag{20}$$

なので、特解は

$$y = -\frac{3}{10} \sin x - \frac{1}{10} \cos x \tag{21}$$

となるので、求める一般解は、

$$y = Ae^x + Be^{-2x} - \frac{3}{10} \sin x - \frac{1}{10} \cos x \tag{22}$$

となる。

(3-4)  $y'' + y' - 2y = e^x$

特性方程式  $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$  の解は  $\lambda = 1, -2$  なので、斉次方程式の一般解は  $y = Ae^x + Be^{-2x}$  となる。

次に、特解を求める。微分方程式の右辺が基本解と一致しているので、

$$y = axe^x \tag{23}$$

とおく。微分すると、

$$y' = e^x(ax + a), \quad y'' = e^x(ax + 2a) \tag{24}$$

なので、これらを元の微分方程式に代入して、

$$e^x(ax + 2a + ax + a - 2ax) = 3ae^x = e^x \tag{25}$$

より、

$$a = 1/3 \tag{26}$$

なので、特解は

$$y = \frac{1}{3}xe^x \tag{27}$$

となるので、求める一般解は、

$$y = Ae^x + Be^{-2x} + \frac{1}{3}xe^x \tag{28}$$

となる。

(3-5)  $y'' + 4y = \sin 2x$

特性方程式  $\lambda^2 + 4 = 0$  の解は  $\lambda = \pm 2i$  なので、齊次方程式の一般解は  $y = A \cos 2x + B \sin 2x$  となる。

次に、特解を求める。微分方程式の右辺が基本解と一致しているので、

$$y = x(a \cos 2x + b \sin 2x) \quad (29)$$

とおく。微分すると、

$$\begin{aligned} y' &= (a \cos 2x + b \sin 2x) + x(-2a \sin 2x + 2b \cos 2x) \\ y'' &= (-4a \sin 2x + 4b \cos 2x) + x(-4a \cos 2x - 4b \sin 2x) \end{aligned} \quad (30)$$

なので、これらを元の微分方程式に代入して、

$$\begin{aligned} &(-4a \sin 2x + 4b \cos 2x) + x(-4a \cos 2x - 4b \sin 2x) + 4x(a \cos 2x + b \sin 2x) \\ &= -4a \sin 2x + 4b \cos 2x \\ &= \sin 2x \end{aligned} \quad (31)$$

より、

$$a = -1/4, \quad b = 0 \quad (32)$$

なので、特解は

$$y = -\frac{1}{4}x \cos 2x \quad (33)$$

となるので、求める一般解は、

$$y = A \cos 2x + B \sin 2x - \frac{1}{4}x \cos 2x \quad (34)$$

となる。