数学II　第9回　微分方程式の応用I

2014年11月18日　　担当：佐藤 純

問題1 反応速度定数 k の化学反応 $A+B \to C$ を考える。

(1-1) 時刻 $t=0$ での A, B の濃度を N とし, C の濃度を 0 とする。
化学反応で C が x だけ生成されたとき、A, B の濃度を求めよ。
$\boxed{N-x}$

(1-2) 時刻 t における C の濃度 $x(t)$ が満たす微分方程式を書け。
C の生成速度 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ は A の濃度 $N-x$ と B の濃度 $N-x$ の積 $(N-x)^2$ に比例し、その比例定数が反応速度定数 k であるので、

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = k(N-x)^2}$$

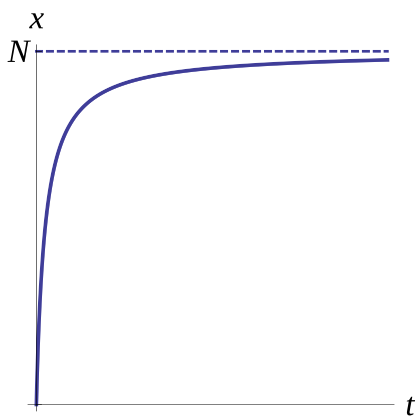
となる。

(1-3) 上の微分方程式を解くことにより $x(t)$ を求め、グラフを描け。

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(N-x)^2} = \int k\mathrm{d}t, \quad \frac{1}{N-x} = kt + A$$

ここで、初期条件 $x(0)=0$ より、$A = 1/N$ なので、

$$\frac{1}{N-x} = kt + \frac{1}{N}, \quad \boxed{x(t) = N\left(1 - \frac{1}{Nkt+1}\right)}$$



最初は一気に反応が進むが、だんだん緩慢になり、濃度が N に達するまでには無限に時間がかかる。

問題2 地上の高い地点から質量 m のボールをそっと放し、ボールを落下させる。
その際、ボールは速度に比例する空気抵抗を受けるとし、その比例定数を γ とする。
鉛直下向きに z 軸を取り、ボールの初期位置を $z=0$ とする。

(2-1) ボールの運動方程式を立てよ。

$$\boxed{m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg - \gamma v}$$

(2-2) 空気抵抗と重力が釣り合う条件から、時刻無限大 $t \to \infty$ でのボールの速度 v_∞ を求めよ。

$mg = \gamma v_\infty$ より、$\boxed{v_\infty = \dfrac{mg}{\gamma}}$

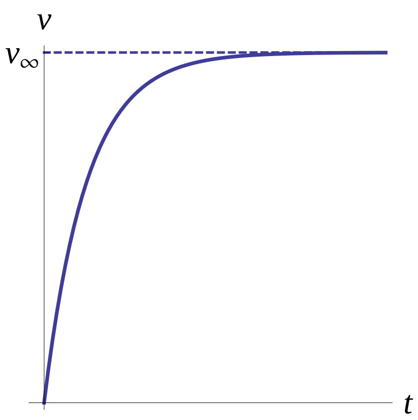
(2-3) 運動方程式を解くことにより、時刻 t における物体の速度 $v(t)$ を求め、グラフを描け。

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g - \frac{\gamma}{m}v = -\frac{\gamma}{m}\left(v - \frac{mg}{\gamma}\right) = -\frac{\gamma}{m}\left(v - v_\infty\right),\\
&\int \frac{\mathrm{d}v}{v - v_\infty} = -\int \frac{\gamma}{m}\mathrm{d}t,\\
&\log|v - v_\infty| = -\frac{\gamma}{m}t + A,\\
&v - v_\infty = Be^{-\frac{\gamma}{m}t},
\end{aligned}
$$

ここで、初期条件 $v(0) = 0$ より、$-v_\infty = B$ なので、

$$\boxed{v = v_\infty\left(1 - e^{-\frac{\gamma}{m}t}\right)}$$

を得る。



(2-4) 空気抵抗を小さくする極限 $\gamma \to 0$ で、ボールの運動は空気抵抗がない場合の自由落下 $(v = gt)$ になることを示せ。

$e^x = 1 + x + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{3!}x^3 + \cdots + \dfrac{1}{n!}x^n + \cdots$ より、$\gamma \ll 1$ のとき、

$$v = v_\infty\left(1 - e^{-\frac{\gamma}{m}t}\right) = v_\infty\left\{1 - \left(1 - \frac{\gamma}{m}t + \cdots\right)\right\} = v_\infty\frac{\gamma}{m}t = gt$$

となる。

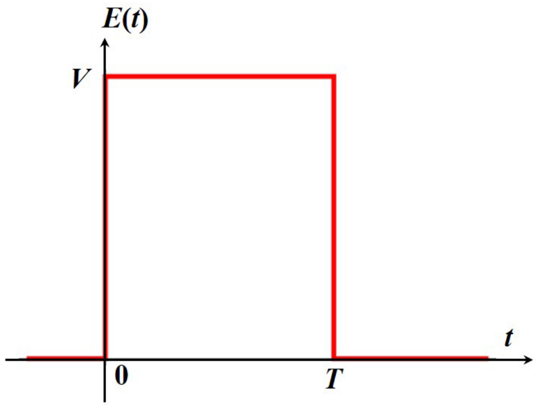
問題 3 自己インダクタンス L のコイルと抵抗 R を直列につないだ回路に、時刻 t における起電力が $E(t)$ で与えられる電源をつなぐ。この回路に流れる電流 $I(t)$ は、微分方程式

$$L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}I(t) + RI(t) = E(t)$$

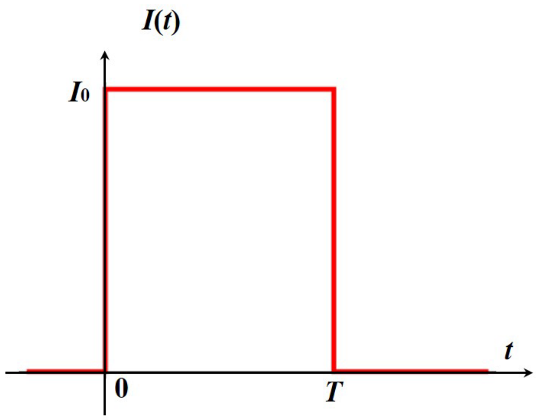
を満たす。初期条件として、$t < 0$ のとき電源はオフで、$E(t) = I(t) = 0$ とする。

時刻 $t = 0$ に電源をオンにして起電力 V(=定数) を与え、時刻 $t = T$ に再び電源をオフにする。すなわち、$0 < t < T$ で $E(t) = V$, $t > T$ で $E(t) = 0$ とする。

(3-1) 回路の起電力 $E(t)$ のグラフを描け。



(3-2) $L=0$ のとき、回路を流れる電流 $I(t)$ のグラフを描け。
$L=0$ のとき、$I(t)=\dfrac{E(t)}{R}$ なので、電流は単に電圧に比例し（オームの法則)、グラフは以下のようになる。



ただし、$I_0=V/R$ である。

(3-3) $L>0$ のとき、回路を流れる電流 $I(t)$ のグラフを描け。
微分方程式を変形すると、

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{L}\{E(t)-RI(t)\}=-\frac{R}{L}\{I(t)-E(t)/R\}$$

となる。
$t<0$ のときは電源がオフで、$I(t)=0$ である。
$0<t<T$ のとき、$E(t)=V$ より、

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=-\frac{R}{L}\{I-I_0\},\\
&\int\frac{\mathrm{d}I}{I-I_0}=-\int\frac{R}{L}\mathrm{d}t,\\
&\log|I-I_0|=-\frac{R}{L}t+C,\\
&|I-I_0|=e^{-\frac{R}{L}t+C}=e^Ce^{-\frac{R}{L}t},\\
&I-I_0=\pm e^Ce^{-\frac{R}{L}t}=Ae^{-\frac{R}{L}t}\quad(A=\pm e^C)
\end{aligned}$$

ここで、初期条件 $I(0)=0$ より、$0-I_0=Ae^0=A$ より、$A=-I_0$ なので、

$$I(t)=I_0(1-e^{-\frac{R}{L}t})$$

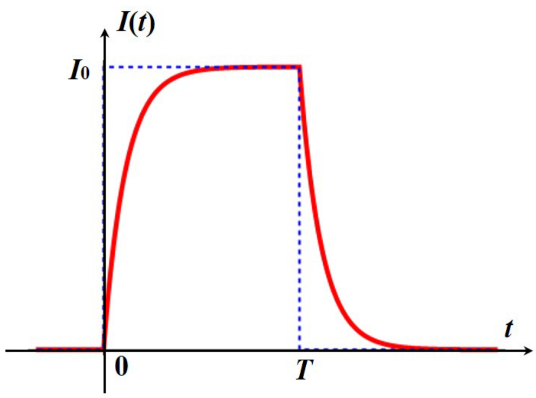
を得る。
$t > T$ のときは、$E(t) = 0$ より、

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = -\frac{R}{L}I,\\
&\int \frac{\mathrm{d}I}{I} = -\int \frac{R}{L}\mathrm{d}t,\\
&\log|I| = -\frac{R}{L}t + D,\\
&|I| = e^{-\frac{R}{L}t+D} = e^{D}e^{-\frac{R}{L}t},\\
&I = \pm e^{D}e^{-\frac{R}{L}t} = Be^{-\frac{R}{L}t} \quad (B = \pm e^{D})
\end{aligned}
$$

を得る。上で得た $0 < t < T$ での解との接続条件 $I(T) = I_0(1 - e^{-\frac{R}{L}T})$ から、積分定数 B を決定する。
ここで、$I_T = I(T) = I_0(1 - e^{-\frac{R}{L}T})$ とおくと、$I_T = Be^{-\frac{R}{L}T}$ より、$B = I_T e^{\frac{R}{L}T}$ を得る。したがって、

$$
I(t) = I_T e^{-\frac{R}{L}(t-T)}
$$

となる。



スイッチを on, off しても電流値は即座に反応せず、応答に遅れが生じている。
しかし、一定時間経過後には、コイルがないときの電流値に収束している。