数学 II　第 7 回　同次型, 一階線形微分方程式

2014 年 11 月 4 日　　担当：佐藤 純

$\boxed{\textbf{問題 1}}$ 以下の同次型微分方程式を、与えられた初期条件のもとに解け。

(1-1) $y' = \dfrac{x-y}{x+y}$ 　　$(x,y)=(0,0)$

$$y' = \frac{x-y}{x+y} = \frac{1-\frac{y}{x}}{1+\frac{y}{x}}.$$

ここで、$z=\frac{y}{x}$ とおくと、$y=zx$ の両辺を x で微分して、$y'=z'x+z$ である。よって、

$$\begin{aligned}
&z'x+z = \frac{1-z}{1+z},\\
&z'x = \frac{1-z}{1+z} - z = \frac{1-2z-z^2}{1+z},\\
&\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x}\frac{1-2z-z^2}{1+z},\\
&\int \frac{1+z}{1-2z-z^2}\mathrm{d}z = \int \frac{\mathrm{d}x}{x},\\
&-\frac{1}{2}\log|1-2z-z^2| = \log|x| + C,\\
&\log|1-2z-z^2| = -2\log|x| - 2C = \log\frac{1}{x^2} - 2C,\\
&1-2z-z^2 = \frac{A}{x^2},\\
&x^2-2xy-y^2 = A
\end{aligned}$$

を得る。初期条件より $A=0$ なので、$x^2-2xy-y^2=0$ となる。

(1-2) $y' = \dfrac{2xy}{x^2-y^2}$ 　　$(x,y)=(0,1)$

$$y' = \frac{2xy}{x^2-y^2} = \frac{2\left(\frac{y}{x}\right)}{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}.$$

ここで、$z=\frac{y}{x}$ とおくと、$y=zx$ の両辺を x で微分して、$y'=z'x+z$ である。よって、

$$\begin{aligned}
&z'x+z = \frac{2z}{1-z^2},\\
&z'x = \frac{2z}{1-z^2} - z = \frac{z+z^3}{1-z^2},\\
&\int \frac{1-z^2}{z+z^3}\mathrm{d}z = \int \frac{\mathrm{d}x}{x}.
\end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\frac{1-z^2}{z+z^3} = \frac{1-z^2}{z(1+z^2)} = \frac{a}{z} + \frac{bz+c}{1+z^2}$$

とおいて、定数 a, b, c を決定する。

$$\frac{a}{z}+\frac{bz+c}{1+z^2}=\frac{a+az^2+bz^2+cz}{z(1+z^2)}$$

なので、恒等式 $1-z^2=a+az^2+bz^2+cz$ が成り立つためには、$a+b=-1,\ c=0,\ a=1$ なので、これを解いて $a=1,\ b=-2,\ c=0$ を得るよって、

$$\begin{aligned}
&\int\frac{1-z^2}{z+z^3}\mathrm{d}z=\int\frac{\mathrm{d}x}{x},\\
&\int\left(\frac{1}{z}-\frac{2z}{1+z^2}\right)\mathrm{d}z=\int\frac{\mathrm{d}x}{x},\\
&\log\left|\frac{z}{1+z^2}\right|=\log|x|+C,\\
&\frac{z}{1+z^2}=Ax,\\
&\frac{y}{x^2+y^2}=A
\end{aligned}$$

を得る。初期条件より $A=1$ なので、$x^2+y^2-y=0$ となる。

問題 2 以下の一階線形微分方程式を、与えられた初期条件のもとに解け。

(2-1) $y'-y=x \qquad (x,y)=(0,0)$

右辺をゼロにおいた、$y'-y=0$ をまず解く。これは変数分離形なので、

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y,\\
&\frac{\mathrm{d}y}{y}=\mathrm{d}x,\\
&\int\frac{\mathrm{d}y}{y}=\int\mathrm{d}x,\\
&\log|y|=x+C,\\
&y=Ae^x
\end{aligned}$$

と解ける。ここで、A は積分定数であるが、x の関数 $A(x)$ であるとみなして (定数変化法)、もとの微分方程式に代入すると、

$$\begin{aligned}
&A'e^x+Ae^x-Ae^x=x,\\
&A'=xe^{-x}
\end{aligned}$$

と A に対する微分方程式が得られる。これを積分して

$$\begin{aligned}
A&=\int xe^{-x}\mathrm{d}x\\
&=\int x(-e^{-x})'\mathrm{d}x\\
&=-xe^{-x}+\int(x)'e^{-x}\mathrm{d}x\\
&=-xe^{-x}-e^{-x}+C
\end{aligned}$$

と A が求まる。これを $y=Ae^x$ に代入して、$y=Ce^x-x-1$ を得る。初期条件より $C=1$ なので、

$$y=e^x-x-1$$

となる。

(2-2) $y' - 2y = e^x \qquad (x, y) = (0, 0)$
右辺をゼロにおいた、$y' - 2y = 0$ をまず解く。これは変数分離形なので、

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2y, \\
&\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int 2\mathrm{d}x, \\
&\log|y| = 2x + C, \\
&y = Ae^{2x}
\end{aligned}$$

と解ける。ここで、A は積分定数であるが、x の関数 $A(x)$ であるとみなして (定数変化法)、もとの微分方程式に代入すると、

$$\begin{aligned}
&A'e^{2x} + 2Ae^{2x} - 2Ae^{2x} = e^x, \\
&A' = e^{-x}
\end{aligned}$$

と A に対する微分方程式が得られる。これを積分して

$$A = -e^{-x} + C$$

と A が求まる。これを $y = Ae^{2x}$ に代入して、$y = Ce^{2x} - e^x$ を得る。初期条件より $C = 1$ なので、

$$y = e^{2x} - e^x$$

となる。

(2-3) $y' + xy = x^3 \qquad (x, y) = (0, 0)$
右辺をゼロにおいた、$y' + xy = 0$ をまず解く。
これは変数分離形なので、

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -xy, \\
&\frac{\mathrm{d}y}{y} = -x\mathrm{d}x, \\
&\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\int x\mathrm{d}x, \\
&\log|y| = -\frac{1}{2}x^2 + C, \\
&y = Ae^{-\frac{1}{2}x^2}
\end{aligned}$$

と解ける。ここで、A は積分定数であるが、x の関数 $A(x)$ であるとみなして (定数変化法)、もとの微分方程式に代入すると、

$$\begin{aligned}
&A'e^{-\frac{1}{2}x^2} - xAe^{-\frac{1}{2}x^2} + xAe^{-\frac{1}{2}x^2} = x^3, \\
&A' = x^3 e^{\frac{1}{2}x^2}
\end{aligned}$$

と A に対する微分方程式が得られる。これを積分して

$$\begin{aligned}
A &= \int x^3 e^{\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x \\
&= \int x^2 (e^{\frac{1}{2}x^2})'\mathrm{d}x \\
&= x^2 e^{\frac{1}{2}x^2} - \int (x^2)' e^{\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= x^2 e^{\frac{1}{2}x^2} - 2\int x e^{\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x \\
&= x^2 e^{\frac{1}{2}x^2} - 2e^{\frac{1}{2}x^2} + C
\end{aligned}
$$

と A が求まる。これを $y = Ae^{-\frac{1}{2}x^2}$ に代入して、$y = Ce^{-\frac{1}{2}x^2} + x^2 - 2$ を得る。初期条件より $C = 2$ なので、

$$
y = 2e^{-\frac{1}{2}x^2} + x^2 - 2
$$

となる。

(2-4) $y' + y\cos x = \sin 2x \qquad (x, y) = (0, 0)$
右辺をゼロにおいた、$y' + y\cos x = 0$ をまず解く。これは変数分離形なので、

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -y\cos x, \\
&\frac{\mathrm{d}y}{y} = -\cos x\mathrm{d}x, \\
&\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\int \cos x\mathrm{d}x, \\
&\log|y| = -\sin x + C, \\
&y = Ae^{-\sin x}
\end{aligned}
$$

と解ける。ここで、A は積分定数であるが、x の関数 $A(x)$ であるとみなして (定数変化法)、もとの微分方程式に代入すると、

$$
\begin{aligned}
&A'e^{-\sin x} - \cos x Ae^{-\sin x} + \cos x Ae^{-\sin x} = \sin 2x, \\
&A' = \sin 2x e^{\sin x}
\end{aligned}
$$

と A に対する微分方程式が得られる。これを積分して

$$
\begin{aligned}
A &= \int \sin 2x e^{\sin x}\mathrm{d}x \\
&= 2\int \sin x\cos x e^{\sin x}\mathrm{d}x \\
&= 2\int (\sin x)' \sin x e^{\sin x}\mathrm{d}x \\
&= 2\int te^t\mathrm{d}t \qquad (t = \sin x) \\
&= 2\int t(e^t)'\mathrm{d}t \\
&= 2te^t - 2\int (t)'e^t\mathrm{d}t \\
&= 2(t-1)e^t + C \\
&= 2(\sin x - 1)e^{\sin x} + C
\end{aligned}
$$

と A が求まる。これを $y = Ae^{-\sin x}$ に代入して、$y = Ce^{-\sin x} + 2(\sin x - 1)e^{\sin t}$ を得る。初期条件より $C = 2$ なので、

$$
y = 2(e^{-\sin x} + \sin x - 1)
$$

となる。

問題 3 自己インダクタンス L のコイルと抵抗 R を直列につないだ回路に、時刻 t における起電力が $E(t)$ で与えられる電源をつなぐ。この回路に流れる電流 $I(t)$ は、微分方程式

$$L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}I(t) + RI(t) = E(t)$$

を満たす。初期条件として、$t < 0$ のとき電源はオフで、$E(t) = I(t) = 0$ とする。

時刻 $t = 0$ に電源をオンにして起電力 V (=定数) を与え、時刻 $t = T$ に再び電源をオフにする。すなわち、$0 < t < T$ で $E(t) = V$, $t > T$ で $E(t) = 0$ とする。

(3-1) 回路の起電力 $E(t)$ のグラフを描け。

(3-2) $L = 0$ のとき、回路を流れる電流 $I(t)$ のグラフを描け。

(3-3) $L > 0$ のとき、回路を流れる電流 $I(t)$ のグラフを描け。