数学II　第5回　積分のまとめ

2014年10月21日　　担当：佐藤 純

問題1 以下の不定積分を計算せよ。

(1-1) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-1} = \frac{1}{2}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$

x^2-1 を因数分解すると、$x^2-1=(x+1)(x-1)$ なので、$\dfrac{1}{x^2-1}$ を部分分数分解して、

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x+1)(x-1)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1}$$

という形に書く。ここで、a, b は適当においた定数で、この式が成り立つようにこれから決める。両辺に $(x+1)(x-1)$ をかけると、

$$1 = a(x-1) + b(x+1)$$

を得る。これに $x=1$ を代入すると、$1=2b$ なので $b=1/2$ となり、$x=-1$ を代入すると、$1=-2a$ なので $a=-1/2$ となる。
よって、

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-1} &= \int\left(\frac{-\frac{1}{2}}{x+1} + \frac{\frac{1}{2}}{x-1}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\int\frac{\mathrm{d}x}{x-1} - \int\frac{\mathrm{d}x}{x+1}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\log|x-1| - \log|x+1|\right) + C\\ &= \frac{1}{2}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C\end{aligned}$$

となる。

(1-2) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \tan^{-1}x + C$

$(\tan^{-1}x)' = \dfrac{1}{x^2+1}$ なので直ちに上式を得る。

これは公式そのものなので解答だけでよいが、参考までに、以下のような "計算" も可能であることを示す

$$\begin{aligned}y = \int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} &= \frac{1}{2\mathrm{i}}\int\left(\frac{1}{x-\mathrm{i}} - \frac{1}{x+\mathrm{i}}\right)\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2\mathrm{i}}\log\frac{x-\mathrm{i}}{x+\mathrm{i}} + C\end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned}&2\mathrm{i}(y-C) = \log\frac{x-\mathrm{i}}{x+\mathrm{i}},\\ &e^{2\mathrm{i}(y-C)} = \frac{x-\mathrm{i}}{x+\mathrm{i}},\\ &x = \mathrm{i}\frac{1+e^{2\mathrm{i}(y-C)}}{1-e^{2\mathrm{i}(y-C)}} = \mathrm{i}\frac{e^{-\mathrm{i}(y-C)}+e^{\mathrm{i}(y-C)}}{e^{-\mathrm{i}(y-C)}-e^{\mathrm{i}(y-C)}} = \mathrm{i}\frac{2\cos(y-C)}{-2\mathrm{i}\sin(y-C)} = -\frac{\cos(y-C)}{\sin(y-C)}\end{aligned}$$

を得る。ここで、$C' = C + \dfrac{\pi}{2}$ とすると、

$$\begin{aligned}&x = -\frac{\cos(y-C'+\frac{\pi}{2})}{\sin(y-C'+\frac{\pi}{2})} = -\frac{-\sin(y-C')}{\cos(y-C')} = \tan(y-C'),\\ &\tan^{-1}x = y - C'\end{aligned}$$

より、$y = \tan^{-1}x + C'$ を得る。

(1-3) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3+1} = \frac{1}{3}\log|x+1| - \frac{1}{6}\log(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C$

$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$ と因数分解されるので、$\dfrac{1}{x^3+1}$ を部分分数分解して、

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2-x+1}$$

という形に書く。ここで、a, b, c は適当においた定数で、この式が成り立つようにこれから決める。両辺に $(x+1)(x^2-x+1)$ をかけると、

$$1 = a(x^2-x+1) + (x+1)(bx+c)$$

を得る。これに $x=-1$ を代入すると、$1=3a$ なので $a=1/3$ となり、$x=0$ を代入すると、$1=a+c$ なので $c=2/3$ となり、$x=1$ を代入すると、$1=a+2(b+c)$ なので $3=3a+2(3b+3c)=1+2(3b+2)=6b+5$ より、$b=-1/3$ となる。
よって、

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3+1} &= \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}x}{x+1} - \frac{1}{3}\int \frac{x-2}{x^2-x+1}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{3}\log|x+1| - \frac{1}{3}\int \frac{\frac{1}{2}(2x-1)-\frac{3}{2}}{x^2-x+1}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{3}\log|x+1| - \frac{1}{6}\int \frac{(x^2-x+1)'}{x^2-x+1}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-x+1} \\
&= \frac{1}{3}\log|x+1| - \frac{1}{6}\log(x^2-x+1) + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}
\end{aligned}$$

となる。
ここで、$(x-\frac{1}{2})^2 = \frac{3}{4}t^2$ となるように変数を x から t に置換すると、
$x=\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{1}{2},\ t=\frac{2x-1}{\sqrt{3}},\ \mathrm{d}x=\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{d}t$ なので、

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} &= \frac{1}{2}\int \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{d}t}{\frac{3}{4}t^2+\frac{3}{4}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}t + C \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C
\end{aligned}$$

となり、結局

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3+1} = \frac{1}{3}\log|x+1| - \frac{1}{6}\log(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

を得る。

(1-4) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \log\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C$

三角関数の有理関数の積分は置換 $t=\tan\frac{x}{2}$ によって t の有理関数の積分に帰着し、必ず可積分となる。
$1+t^2 = 1+\tan^2\frac{x}{2} = 1+\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}$ であるが、
ここで、$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ において $\alpha=\beta=\frac{x}{2}$ とおくと、
$\cos x = \cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2} = 2\cos^2\frac{x}{2}-1$ より $\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1+\cos x}{2}$ なので、
$1+t^2=\frac{2}{1+\cos x},\ (1+t^2)(1+\cos x)=2,\ (1+t^2)\cos x = 2-(1+t^2)=1-t^2$ より、
$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ を得る。
また、$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ において $\alpha=\beta=\frac{x}{2}$ とおくと、

$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} = \frac{2t}{1+t^2}$ を得る。
また、$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = (\tan\frac{x}{2})' = \frac{1}{2}\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1+t^2}{2}$ より、$\mathrm{d}x = \frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}$ を得る。
以上をまとめると、

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \mathrm{d}x = \frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}$$

となる。

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \int \frac{1+t^2}{2t}\frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \log|t| + C = \log\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C$$

別解：

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = \int \frac{(-\cos x)'}{1-\cos^2 x}\mathrm{d}x$$

なので、$t = \cos x$ とおけば、$\mathrm{d}t = -\sin x\mathrm{d}x$ より、

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} &= \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2-1} = \frac{1}{2}\log\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = \frac{1}{2}\log\left|\frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}\right| + C \\
&= \frac{1}{2}\log\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right| + C = \frac{1}{2}\log\left|\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}\right| + C = \frac{1}{2}\log\left|\tan^2\frac{x}{2}\right| + C \\
&= \log\left|\tan^2\frac{x}{2}\right|^{\frac{1}{2}} + C = \log\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C
\end{aligned}$$

(1-5) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x} = \frac{2\sin\frac{t}{2}}{\cos\frac{t}{2} + \sin\frac{t}{2}} + C$
置換 $t = \tan\frac{x}{2}$ によって

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x} &= \int \frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}}\frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2} = \int \frac{2\mathrm{d}t}{(1+t)^2} = -\frac{2}{1+t} + C = \frac{2t}{1+t} + C' \\
&= \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan\frac{x}{2}} + C' = \frac{2\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}} + C'
\end{aligned}$$

を得る。

(1-6) $\displaystyle\int\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2}\log(x+\sqrt{x^2+1}) + C$
置換 $t = x + \sqrt{x^2+1}$ を用いて、

$$\begin{aligned}
&t - x = \sqrt{x^2+1}, \\
&(t-x)^2 = x^2 + 1, \\
&t^2 - 2tx = 1, \\
&x = \frac{t^2-1}{2t} = \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right), \\
&\sqrt{x^2+1} = t - x = t - \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right) = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right), \\
&\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)'\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2t}\left(t + \frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

以上より、

$$\int\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right)\frac{1}{2t}\left(t + \frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$$

$$
\begin{aligned}
&= \int \frac{1}{4}\left(t + \frac{2}{t} + \frac{1}{t^3}\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{8}t^2 + \frac{1}{2}\log|t| - \frac{1}{8t^2} + C \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right) \times \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right) + \frac{1}{2}\log|t| + C \\
&= \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2}\log(x + \sqrt{x^2+1}) + C
\end{aligned}
$$

となる。

(1-7) $\displaystyle\int\sqrt{\frac{1-x}{x}}\ \mathrm{d}x = \sqrt{x(1-x)} - \tan^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{x}} + C$

置換 $t = \sqrt{\frac{1-x}{x}}$ を用いて、

$$
\begin{aligned}
t^2 &= \frac{1-x}{x} = \frac{1}{x} - 1, \\
x &= \frac{1}{1+t^2}, \\
\mathrm{d}x &= \left(\frac{1}{1+t^2}\right)'\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

より、

$$
\begin{aligned}
\int\sqrt{\frac{1-x}{x}}\ \mathrm{d}x &= \int t\left(\frac{1}{1+t^2}\right)'\mathrm{d}t = t\ \frac{1}{1+t^2} - \int t'\ \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t \\
&= \frac{t}{1+t^2} - \int\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{t}{1+t^2} - \tan^{-1}t + C \\
&= \sqrt{x(1-x)} - \tan^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{x}} + C
\end{aligned}
$$

となる。

$\boxed{\textbf{問題 2}}$ 正の実数 t に対し、ガンマ関数 $\Gamma(t) = \displaystyle\int_0^\infty x^{t-1}e^{-x}\mathrm{d}x$ を定義する。

(2-1) 漸化式 $\Gamma(t+1) = t\,\Gamma(t)$ を示せ。

$$
\begin{aligned}
\Gamma(t+1) &= \int_0^\infty x^t e^{-x}\mathrm{d}x = \int_0^\infty x^t(-e^{-x})'\mathrm{d}x = -[x^t e^{-x}]_0^\infty + \int_0^\infty (x^t)'e^{-x}\mathrm{d}x \\
&= t\int_0^\infty x^{t-1}e^{-x}\mathrm{d}x = t\,\Gamma(t)
\end{aligned}
$$

(2-2) 自然数 n に対し、$\Gamma(n) = (n-1)!$ を示せ。
ただし、$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n-1) \times n$, $0! = 1$ である。

$$
\begin{aligned}
\Gamma(1) &= \int_0^\infty e^{-x}\mathrm{d}x = -[e^{-x}]_0^\infty = 1 = 0!, \\
\Gamma(n) &= (n-1)\Gamma(n-1) = (n-1)(n-2)\Gamma(n-2) \\
&= \cdots = (n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1\cdot\Gamma(1) = (n-1)!
\end{aligned}
$$

問題 3 正の実数 s, t に対し、ベータ関数 $B(s,t) = \int_0^1 x^{s-1}(1-x)^{t-1}\mathrm{d}x$ を定義する。

(3-1) $B(s,t) = B(t,s)$ を示せ。
$y = 1-x$ と置換すると、

$$\begin{aligned} B(s,t) &= \int_0^1 x^{s-1}(1-x)^{t-1}\mathrm{d}x = \int_1^0 (1-y)^{s-1}y^{t-1}(-\mathrm{d}y) \\ &= \int_0^1 (1-y)^{s-1}y^{t-1}\mathrm{d}y = B(t,s) \end{aligned}$$

(3-2) $B(s,t+1) = \frac{t}{s}B(s+1,t)$ を示せ。

$$\begin{aligned} B(s,t+1) &= \int_0^1 x^{s-1}(1-x)^t\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\frac{1}{s}x^s\right)'(1-x)^t\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{1}{s}x^s(1-x)^t\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{s}x^s\{(1-x)^t\}'\mathrm{d}x = \frac{t}{s}\int_0^1 x^s(1-x)^{t-1}\mathrm{d}x \\ &= \frac{t}{s}B(s+1,t) \end{aligned}$$

(3-3) 自然数 n, m に対し、$B(n,m) = \dfrac{\Gamma(n)\Gamma(m)}{\Gamma(n+m)}$ を示せ。

$$\begin{aligned} B(n,m) &= \frac{m-1}{n}B(n+1,m-1) = \left(\frac{m-1}{n}\frac{m-2}{n+1}\right)B(n+2,m-2) \\ &= \cdots = \left(\frac{m-1}{n}\frac{m-2}{n+1}\cdots\frac{1}{n+m-2}\right)B(n+m-1,1) \\ &= \left(\frac{m-1}{n}\frac{m-2}{n+1}\cdots\frac{1}{n+m-2}\right)\int_0^1 x^{n+m-2}\mathrm{d}x \\ &= \left(\frac{m-1}{n}\frac{m-2}{n+1}\cdots\frac{1}{n+m-2}\right)\left[\frac{1}{n+m-1}x^{n+m-1}\right]_0^1 \\ &= \frac{m-1}{n}\frac{m-2}{n+1}\cdots\frac{1}{n+m-2}\frac{1}{n+m-1} \\ &= \frac{(m-1)(m-2)\cdots 2\cdot 1}{n(n+1)(n+2)\cdots(n+m-2)(n+m-1)} \\ &= \frac{(m-1)!}{n(n+1)(n+2)\cdots(n+m-2)(n+m-1)} \times \frac{(n-1)!}{(n-1)!} \\ &= \frac{(n-1)!(m-1)!}{(n+m-1)!} = \frac{\Gamma(n)\Gamma(m)}{\Gamma(n+m)} \end{aligned}$$

(3-4) 自然数 n, m に対し、$\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^n(\beta-x)^m\mathrm{d}x = (\beta-\alpha)^{n+m+1}\frac{n!m!}{(n+m+1)!}$ を示せ。

$x = \alpha + t(\beta-\alpha)$ と置換すれば、$\begin{array}{c|c} x & \alpha \to \beta \\ \hline t & 0 \to 1 \end{array}$ および $\beta - x = (\beta-\alpha)(1-t)$ より、

$$\begin{aligned} \int_\alpha^\beta (x-\alpha)^n(\beta-x)^m\mathrm{d}x &= \int_0^1 \{t(\beta-\alpha)\}^n\{(\beta-\alpha)(1-t)\}^m(\beta-\alpha)\mathrm{d}t \\ &= (\beta-\alpha)^{n+m+1}\int_0^1 t^n(1-t)^m\mathrm{d}t \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (\beta-\alpha)^{n+m+1} B(n+1, m+1) \\
&= (\beta-\alpha)^{n+m+1} \frac{n!m!}{(n+m+1)!}
\end{aligned}
$$

を得る。

(3-5) 定積分 $\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(\beta-x)\mathrm{d}x, \int_\alpha^\beta (x-\alpha)(\beta-x)^2\mathrm{d}x, \int_\alpha^\beta (x-\alpha)^2(\beta-x)^2\mathrm{d}x$ を計算せよ。

$$
\begin{aligned}
\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(\beta-x)\mathrm{d}x &= (\beta-\alpha)^3 \frac{1!1!}{3!} = \frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3, \\
\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(\beta-x)^2\mathrm{d}x &= (\beta-\alpha)^4 \frac{1!2!}{4!} = \frac{1}{12}(\beta-\alpha)^4, \\
\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^2(\beta-x)^2\mathrm{d}x &= (\beta-\alpha)^5 \frac{2!2!}{3!} = \frac{1}{30}(\beta-\alpha)^5.
\end{aligned}
$$

問題 4 定積分 $\displaystyle\int_1^{e^\pi} \sin(\log x)\mathrm{d}x$ の値を求めよ。

計算が優雅で労力が少ない順に、3 つ解法を示す。

(解法 1)：オイラーの公式

オイラーの公式 $e^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$ より、$\sin\theta = \mathrm{Im} e^{\mathrm{i}\theta}$ なので、

$$
\begin{aligned}
\int_1^{e^\pi} \sin(\log x)\mathrm{d}x &= \mathrm{Im}\int_1^{e^\pi} e^{\mathrm{i}\log x}\mathrm{d}x \\
&= \mathrm{Im}\int_1^{e^\pi} x^{\mathrm{i}}\mathrm{d}x \\
&= \mathrm{Im}\left[\frac{1}{\mathrm{i}+1}x^{\mathrm{i}+1}\right]_1^{e^\pi} \\
&= -\mathrm{Im}\frac{1}{\mathrm{i}+1}(e^\pi+1) \\
&= \frac{e^\pi+1}{2}
\end{aligned}
$$

(解法 2)：部分積分

$$
\begin{aligned}
I = \int_1^{e^\pi} \sin(\log x)\mathrm{d}x &= \int_1^{e^\pi} (x)' \sin(\log x)\mathrm{d}x \\
&= [x\sin(\log x)]_1^{e^\pi} - \int_1^{e^\pi} x\{\sin(\log x)\}'\mathrm{d}x \\
&= (e^\pi \sin\pi - \sin 0) - \int_1^{e^\pi} x\{\cos(\log x)\}(\log x)'\mathrm{d}x \\
&= (0-0) - \int_1^{e^\pi} x\{\cos(\log x)\}\frac{1}{x}\mathrm{d}x \\
&= -\int_1^{e^\pi} \cos(\log x)\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -\int_1^{e^\pi} (x)' \cos(\log x)\mathrm{d}x \\
&= -\left[x\cos(\log x)\right]_1^{e^\pi} + \int_1^{e^\pi} \{\cos(\log x)\}'\mathrm{d}x \\
&= -(e^\pi \cos\pi - \cos 0) - \int_1^{e^\pi} \sin(\log x)\mathrm{d}x \\
&= e^\pi + 1 - I
\end{aligned}
$$

より、$I = \dfrac{e^\pi + 1}{2}$ を得る。

(解法 3)：置換積分

$t = \log x$ とおくと、$\begin{array}{c|c} x & 1 \to e^\pi \\ \hline t & 0 \to \pi \end{array}$ であり、$\mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}x}{x}$ より $\mathrm{d}x = x\mathrm{d}t = e^t\mathrm{d}t$ なので、

$$
\begin{aligned}
I = \int_1^{e^\pi} \sin(\log x)\mathrm{d}x &= \int_0^\pi e^t \sin t\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\pi (e^t)' \sin t\mathrm{d}t \\
&= \left[e^t \sin t\right]_0^\pi - \int_0^\pi e^t \cos t\mathrm{d}t \\
&= -\left[e^t \cos t\right]_0^\pi - \int_0^\pi e^t \sin t\mathrm{d}t \\
&= e^\pi + 1 - I
\end{aligned}
$$

より、$I = \dfrac{e^\pi + 1}{2}$ を得る。

問題 5 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x)\mathrm{d}x$ の値を求めたい。

(5-1) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(\cos x)\mathrm{d}x$ を示せ。

$\sin x$ を $\cos x$ に換えたいので、$\cos t = \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$ に注意すれば、$x = \frac{\pi}{2} - t$ と置換すればよいことに気付く。$\begin{array}{c|c} x & \frac{\pi}{4} \to \frac{\pi}{2} \\ \hline t & \frac{\pi}{4} \to 0 \end{array}$ であり、$\mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$ なので、

$$
\begin{aligned}
\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x)\mathrm{d}x &= \int_{\frac{\pi}{4}}^0 \log\left\{\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right\}(-\mathrm{d}t) \\
&= -\int_{\frac{\pi}{4}}^0 \log(\cos t)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(\cos t)\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

となる。

(5-2) 上で示した式をヒントに、定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x)\mathrm{d}x$ の値を求めよ。

$$
I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(\sin x)\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x)\mathrm{d}x
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(\sin x)\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(\cos x)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left\{\log(\sin x) + \log(\cos x)\right\} \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(\sin x \cos x)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \{\log(\sin 2x) - \log 2\}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(\sin 2x)\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log 2\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

ここで、$t = 2x$ とすれば、$\begin{array}{c|c} x & 0 \to \frac{\pi}{4} \\ \hline t & 0 \to \frac{\pi}{2} \end{array}$ であり、$\mathrm{d}t = 2\mathrm{d}x$ なので、

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(\sin 2x)\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log 2\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin t)\frac{\mathrm{d}t}{2} - \frac{\pi}{4}\log 2 \\
&= \frac{1}{2}I - \frac{\pi}{4}\log 2
\end{aligned}
$$

となるので、$I = \frac{1}{2}I - \frac{\pi}{4}\log 2$ より $\frac{1}{2}I = -\frac{\pi}{4}\log 2$ なので

$$
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x)\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{2}\log 2
$$

を得る。

問題 6 定積分 $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ の値を求めたい。

(6-1) 収束因子 e^{-ax} を導入し、a の関数 $f(a) = \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-ax}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ を考える。$f'(a)$ を計算せよ。

e^{-ax} を a で微分すると $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}e^{-ax} = -xe^{-ax}$ となることに注意すれば、

$$
\begin{aligned}
f'(a) &= \int_0^{\infty} (-x)e^{-ax}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x \\
&= -\int_0^{\infty} e^{-ax}\sin x\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

となり、これは普通に部分積分で計算できる：

$$
\begin{aligned}
I = \int_0^{\infty} e^{-ax}\sin x\mathrm{d}x &= \int_0^{\infty} e^{-ax}(-\cos x)'\mathrm{d}x \\
&= \left[e^{-ax}(-\cos x)\right]_0^{\infty} - a\int_0^{\infty} e^{-ax}\cos x\mathrm{d}x \\
&= 1 - a\left[e^{-ax}\sin x\right]_0^{\infty} - a^2\int_0^{\infty} e^{-ax}\sin x\mathrm{d}x \\
&= 1 - a^2 I
\end{aligned}
$$

より、$I = \dfrac{1}{1+a^2}$ を得る。
あるいは、オイラーの公式を使えばもっと簡単に、

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-ax}\sin x\mathrm{d}x &= \mathrm{Im}\int_0^\infty e^{-ax}e^{\mathrm{i}x}\mathrm{d}x \\ &= \mathrm{Im}\left[\frac{1}{\mathrm{i}-a}e^{(\mathrm{i}-a)x}\right]_0^\infty \\ &= -\mathrm{Im}\frac{1}{\mathrm{i}-a} \\ &= \frac{1}{1+a^2}\end{aligned}$$

を得る。

(6-2) 上の計算結果をヒントに、定積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ の値を求めよ。

$f'(a) = -\dfrac{1}{1+a^2}$ より、これを積分して、

$$f(a) = -\int \frac{1}{1+a^2}\mathrm{d}a = -\tan^{-1} a + C$$

を得る。ここで、C は積分定数である。ここで、$f(a \to +\infty) = -\frac{\pi}{2} + C = 0$ より、$C = \frac{\pi}{2}$ である。したがって、

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = f(a \to +0) = \frac{\pi}{2}$$

となる。