

問題1 以下の不定積分を計算せよ。

(1-1)  $\int \frac{dx}{x^2 - 1}$

(1-5)  $\int \frac{dx}{1 + \sin x}$

(1-2)  $\int \frac{dx}{x^2 + 1}$

(1-6)  $\int \sqrt{x^2 + 1} dx \quad (t = x + \sqrt{x^2 + 1})$

(1-3)  $\int \frac{dx}{x^3 + 1}$

(1-7)  $\int \sqrt{\frac{1-x}{x}} dx \quad (t = \sqrt{\frac{1-x}{x}})$

(1-4)  $\int \frac{dx}{\sin x}$

問題2 正の実数  $t$  に対し、ガンマ関数  $\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} dx$  を定義する。

(2-1) 漸化式  $\Gamma(t + 1) = t\Gamma(t)$  を示せ。

(2-2) 自然数  $n$  に対し、 $\Gamma(n) = (n - 1)!$  を示せ。

ただし、 $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n - 1) \times n$ ,  $0! = 1$  である。

問題3 正の実数  $s, t$  に対し、ベータ関数  $B(s, t) = \int_0^1 x^{s-1} (1 - x)^{t-1} dx$  を定義する。

(3-1)  $B(s, t) = B(t, s)$  を示せ。

(3-2)  $B(s, t + 1) = \frac{t}{s} B(s + 1, t)$  を示せ。

(3-3) 自然数  $n, m$  に対し、 $B(n, m) = \frac{\Gamma(n)\Gamma(m)}{\Gamma(n + m)}$  を示せ。

(3-4) 自然数  $n, m$  に対し、 $\int_\alpha^\beta (x - \alpha)^n (\beta - x)^m dx = (\beta - \alpha)^{n+m+1} \frac{n!m!}{(n + m + 1)!}$  を示せ。

(3-5) 定積分  $\int_\alpha^\beta (x - \alpha)(\beta - x) dx$ ,  $\int_\alpha^\beta (x - \alpha)(\beta - x)^2 dx$ ,  $\int_\alpha^\beta (x - \alpha)^2(\beta - x)^2 dx$  を計算せよ。

問題4 定積分  $\int_1^{e^\pi} \sin(\log x) dx$  の値を求めよ。

問題5 定積分  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x) dx$  の値を求めたい。

(5-1)  $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(\cos x) dx$  を示せ。

(5-2) 上で示した式をヒントに、定積分  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x) dx$  の値を求めよ。

問題6 定積分  $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$  の値を求めたい。

(6-1) 収束因子  $e^{-ax}$  を導入し、 $a$  の関数  $f(a) = \int_0^\infty e^{-ax} \frac{\sin x}{x} dx$  を考える。 $f'(a)$  を計算せよ。

(6-2) 上の計算結果をヒントに、定積分  $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$  の値を求めよ。