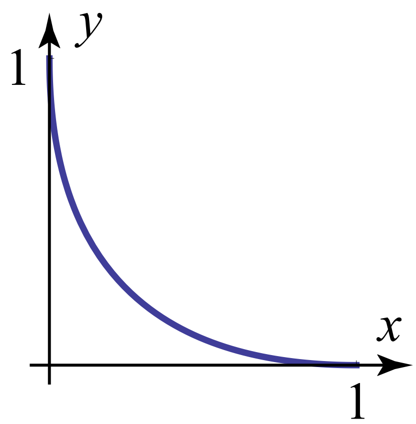
数学II　第4回　定積分の応用

2014 年 10 月 14 日　　担当：佐藤 純

問題 1

(1-1) 曲線 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ を xy 平面上に図示せよ。

$0 \le \sqrt{x} = 1-\sqrt{y} \le 1$ より、$0 \le x \le 1$ である。同様に、$0 \le y \le 1$ を得る。よって、グラフは $0 \le x, y \le 1$ の範囲内にある。また、グラフは 2 点 $(1,0)$ と $(0,1)$ を通る。曲線の式を y について解くと、$y=(1-\sqrt{x})^2=1+x-2\sqrt{x}$ となり、これを微分すると $y'=1-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ となる。曲線の式を直接微分して、$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x+\dfrac{1}{2\sqrt{y}}\mathrm{d}y=0$ として、$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}=-\dfrac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=1-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ としても同じ結果を得る。範囲 $0<x<1$ において $y'<0$ であり、$\lim_{x\to+0} y'=-\infty, \lim_{x\to 1} y'=0$ より、下図のようなグラフになる。

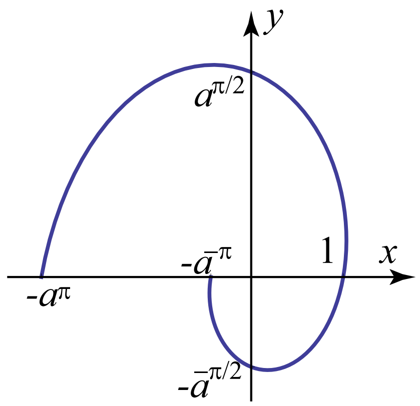


(1-2) 上で描いた曲線と、x 軸、y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

$$
\begin{aligned}
S &= \int_0^1 \mathrm{d}x\left(1+x-2\sqrt{x}\right) \\
&= \left[x+\frac{1}{2}x^2-\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 \\
&= 1+\frac{1}{2}-\frac{4}{3} \\
&= \frac{1}{6}
\end{aligned}
$$

問題 2

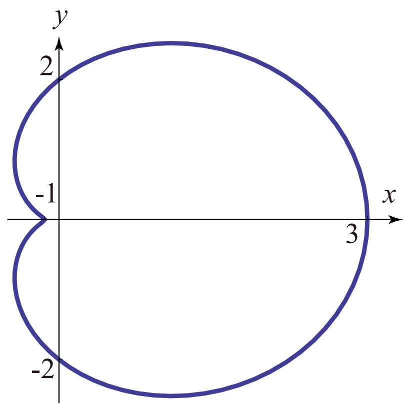
(2-1) 極方程式 $r=a^\theta\ (a>1, -\pi<\theta<\pi)$ で表される曲線を、xy 平面上に図示せよ。



(2-2) 上で描いた曲線のうち、$0 < \theta < \pi/2$ の部分と、x 軸、y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\theta \frac{1}{2} r^2 \\ &= \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\theta \frac{1}{2} a^{2\theta} \\ &= \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\theta \frac{1}{2} e^{2\theta \log a} \\ &= \left[\frac{1}{4 \log a} e^{2\theta \log a} \right]_0^{\pi/2} \\ &= \left[\frac{1}{4 \log a} a^{2\theta} \right]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{1}{4 \log a} (a^{\pi} - 1) \end{aligned}$$

(2-3) 極方程式 $r = 2 + \cos\theta \, (-\pi < \theta < \pi)$ で表される曲線を、xy 平面上に図示せよ。



(2-4) 上で描いた閉曲線が囲む面積を求めよ。

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\theta \frac{1}{2} r^2 \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\theta \frac{1}{2} (2 + \cos\theta)^2 \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\theta \frac{1}{2} \left(4 + 4\cos\theta + \cos^2\theta\right) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\theta \frac{1}{2} \left(4 + 4\cos\theta + \frac{1 + \cos 2\theta}{2}\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\theta \left(\frac{9}{4} + 2\cos\theta + \frac{1}{4}\cos 2\theta\right) \\
&= \left[\frac{9}{4}\theta + 2\sin\theta + \frac{1}{8}\sin 2\theta\right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{9}{2}\pi.
\end{aligned}
$$

問題 3 xy 平面をボールが運動している。時刻 t におけるボールの位置ベクトルは、$\vec{r} = (t - \sin t, 1 - \cos t)$ で与えられるとする。

(3-1) 時刻 $0 < t < 2\pi$ の間に描くボールの軌跡を xy 平面に図示せよ。

まず、$t = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi$ において、ボールは $(x, y) = (0, 0), (\pi/2 - 1, 1), (\pi, 2), (3\pi/2 + 1, 1), (2\pi, 0)$ を通るので、これら四点を順に結べばよい。

次に、微分を計算すると、

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= 1 - \cos t, \\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= \sin t
\end{aligned}
$$

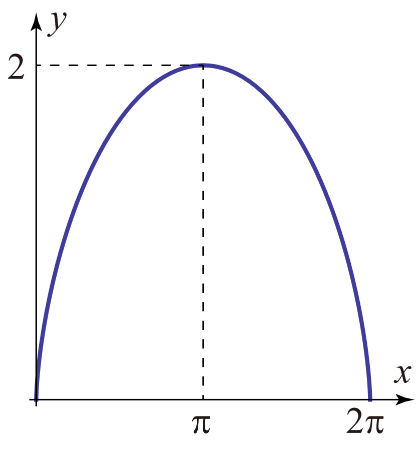
より、

$$
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}
$$

となるので、増減表は

x	0	$\sim$	π	$\sim$	2π
y'	$+\infty$	$+$	0	$-$	$-\infty$
y	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

となる。



(3-2) 上で描いた曲線の全長を求めよ。

$$
\begin{aligned}
L &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}t \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2} \\
&= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}t \sqrt{(1 - \cos t)^2 + (\sin t)^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}t\sqrt{1-\cos t} \\
&= \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}t\sqrt{2\sin^2\frac{t}{2}} \\
&= 2\int_0^{2\pi} \mathrm{d}t\sin\frac{t}{2} \\
&= 4\left[-\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} \\
&= 8
\end{aligned}
$$

$\boxed{\textbf{問題 4}}$

(4-1) 底面積 S, 高さ h の円錐の体積 V を求めよ。
高さ z における円錐の断面積 $f(z)$ は、

$$
f(z) = \frac{S}{h^2}(h-z)^2
$$

で与えられるので、体積 V は

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^h \mathrm{d}z f(z) \\
&= \frac{S}{h^2}\int_0^h \mathrm{d}z(h-z)^2 \\
&= \frac{S}{h^2}\left[-\frac{1}{3}(h-z)^3\right]_0^h \\
&= \frac{hS}{3}
\end{aligned}
$$

となる。

(4-2) 半径 r の球の体積 V を求めよ。
高さ z における球の断面積 $f(z)$ は、

$$
f(z) = \pi(r^2 - z^2)
$$

で与えられるので、体積 V は

$$
\begin{aligned}
V &= \int_{-r}^{r} \mathrm{d}z f(z) \\
&= \pi\int_{-r}^{r} \mathrm{d}z(r^2-z^2) \\
&= \pi\left[r^2 z - \frac{1}{3}z^3\right]_{-r}^{r} \\
&= \frac{4}{3}\pi r^3.
\end{aligned}
$$

となる。

(4-3) 円 $x^2 + (y-b)^2 = a^2,\ (0 < a < b)$ が x 軸の周りに回転してできる立体の体積 V を求めよ。

円の式を y について解くと、

$$y = b \pm \sqrt{a^2 - x^2}$$

なので、x における立体の断面積 $f(x)$ は、

$$\begin{aligned} f(x) &= \pi \left(b + \sqrt{a^2 - x^2}\right)^2 - \pi \left(b - \sqrt{a^2 - x^2}\right)^2 \\ &= 4\pi b\sqrt{a^2 - x^2} \end{aligned}$$

となる。よって、この立体の体積 V は、

$$\begin{aligned} V &= \int_{-a}^{a} \mathrm{d}x f(x) \\ &= 4\pi b \int_{-a}^{a} \mathrm{d}x \sqrt{a^2 - x^2} \end{aligned}$$

となる。
$x = a \sin t$ とすると、

$$\begin{aligned} V &= 4\pi b \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}t (a \cos t) \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} \\ &= 4\pi a^2 b \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}t \cos^2 t \\ &= 4\pi a^2 b \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}t \frac{1 + \cos 2t}{2} \\ &= 4\pi a^2 b \left[\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 2\pi^2 a^2 b \end{aligned}$$

を得る。