

問題1 無限級数 $s = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$ の値を求めたい。

(1-1) $|x| < 1$ のとき、等比級数の公式

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \dots$$

を示せ。

等比級数の公式：

$S = 1 + t + t^2 + \dots + t^{N-1}$ とおくと、

$$S = 1 + t + t^2 + \dots + t^{N-1}$$

$$tS = t + t^2 + \dots + t^{N-1} + t^N$$

この2式を辺々引き算すると

$$(1-t)S = 1 - t^N$$

となるので、

$$S = \frac{1-t^N}{1-t}$$

を得る。ここで、 $|t| < 1$ ならば $\lim_{N \rightarrow \infty} t^N = 0$ なので、

$$1 + t + t^2 + \dots = \frac{1}{1-t} \tag{1}$$

を得る。

式(1)において、 $t = -x$ とすることにより、与式を得る。

(1-2) 上式の両辺を $x = 0$ から $x = 1$ まで積分することにより、無限級数 s の値を求めよ。

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx(1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \dots) &= \int_0^1 \frac{dx}{1+x}, \\ \left[x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{6}x^6 + \dots \right]_0^1 &= [\log|1+x|]_0^1, \\ 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots &= \log 2. \end{aligned}$$

問題2 無限級数 $s = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots$ の値を求めたい。

(2-1) $|x| < 1$ のとき、等比級数の公式

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10} + \dots$$

を示せ。

式(1)において、 $t = -x^2$ とすることにより、与式を得る。

(2-2) 微分 $(\tan^{-1} x)'$ を計算せよ。

$y = \tan^{-1} x$ とする。 $x = \tan y$ なので、これを y で微分すると、

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dy} &= \left(\frac{\sin y}{\cos y} \right)' \\ &= \frac{(\sin y)' \cos y - \sin y (\cos y)'}{\cos^2 y} \\ &= \frac{\cos^2 y + \sin^2 y}{\cos^2 y} \\ &= 1 + \tan^2 y \\ &= 1 + x^2.\end{aligned}$$

を得る。この逆数をとって、

$$(\tan^{-1} x)' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{1+x^2}$$

となる。

(2-3) (2-1) 式の両辺を $x = 0$ から $x = 1$ まで積分することにより、無限級数 s の値を求めよ。

$$\begin{aligned}\int_0^1 dx(1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10} + \dots) &= \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}, \\ \left[x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 - \frac{1}{11}x^{11} + \dots \right]_0^1 &= [\tan^{-1} x]_0^1, \\ 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots &= \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

問題 3 無限積 $s = \prod_{n=1}^{\infty} \cos \frac{\theta}{2^n} = \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{4} \cos \frac{\theta}{8} \cos \frac{\theta}{16} \dots$ の値を求めたい。

(3-1) 第 N 項までの部分積を $s_N = \prod_{n=1}^N \cos \frac{\theta}{2^n}$ とおく。

このとき、関係式

$$s_N \sin \frac{\theta}{2^N} = \frac{1}{2^N} \sin \theta$$

を示せ。

$\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$ より、

$$\begin{aligned}s_N \sin \frac{\theta}{2^N} &= \left(\cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{4} \cos \frac{\theta}{8} \dots \cos \frac{\theta}{2^N} \right) \sin \frac{\theta}{2^N} \\ &= \left(\cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{4} \cos \frac{\theta}{8} \dots \cos \frac{\theta}{2^{N-1}} \right) \left(\cos \frac{\theta}{2^N} \sin \frac{\theta}{2^N} \right) \\ &= \left(\cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{4} \cos \frac{\theta}{8} \dots \cos \frac{\theta}{2^{N-1}} \right) \left(\frac{1}{2} \sin \frac{\theta}{2^{N-1}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{4} \cos \frac{\theta}{8} \dots \cos \frac{\theta}{2^{N-2}} \right) \left(\cos \frac{\theta}{2^{N-1}} \sin \frac{\theta}{2^{N-1}} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{4} \cos \frac{\theta}{8} \cdots \cos \frac{\theta}{2^{N-2}} \right) \left(\frac{1}{2} \sin \frac{\theta}{2^{N-2}} \right) \\
&= \frac{1}{2^2} \left(\cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{4} \cos \frac{\theta}{8} \cdots \cos \frac{\theta}{2^{N-3}} \right) \left(\cos \frac{\theta}{2^{N-2}} \sin \frac{\theta}{2^{N-2}} \right) \\
&= \cdots \\
&= \frac{1}{2^{N-1}} \left(\cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \right) \\
&= \frac{1}{2^N} \sin \theta
\end{aligned}$$

(3-2) 極限 $s = \lim_{N \rightarrow \infty} s_N$ をとることにより、無限積 s の値を求めよ。

$$\begin{aligned}
s &= \lim_{N \rightarrow \infty} s_N = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2^N} \sin \theta}{\sin \frac{\theta}{2^N}} \\
&= \frac{\sin \theta}{\theta} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\frac{\theta}{2^N}}{\sin \frac{\theta}{2^N}} \\
&= \frac{\sin \theta}{\theta}.
\end{aligned}$$