

問題1 無限級数 $s = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$ の値を求めたい。

(1-1) $|x| < 1$ のとき、等比級数の公式

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \dots$$

を示せ。

(1-2) 上式の両辺を $x = 0$ から $x = 1$ まで積分することにより、無限級数 s の値を求めよ。

問題2 無限級数 $s = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots$ の値を求めたい。

(2-1) $|x| < 1$ のとき、等比級数の公式

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10} + \dots$$

を示せ。

(2-2) 微分 $(\tan^{-1} x)'$ を計算せよ。

(2-3) (2-1) 式の両辺を $x = 0$ から $x = 1$ まで積分することにより、無限級数 s の値を求めよ。

問題3 無限積 $s = \prod_{n=1}^{\infty} \cos \frac{\theta}{2^n} = \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{4} \cos \frac{\theta}{8} \cos \frac{\theta}{16} \dots$ の値を求めたい。

(3-1) 第 N 項までの部分積を $s_N = \prod_{n=1}^N \cos \frac{\theta}{2^n}$ とおく。

このとき、関係式

$$s_N \sin \frac{\theta}{2^N} = \frac{1}{2^N} \sin \theta$$

を示せ。

(3-2) 極限 $s = \lim_{N \rightarrow \infty} s_N$ をとることにより、無限積 s の値を求めよ。