

問題1 以下の不定積分を計算せよ。

$$(1-1) \int (x^2 + 2x + 3)dx = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x + C$$

$$(1-2) \int \frac{1}{x^3}dx = -\frac{1}{2x^2} + C$$

$$(1-3) \int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + C$$

$$(1-4) \int e^{-2x} dx = -\frac{1}{2}e^{-2x} + C$$

(1-5) 省略したやり方:

$$\begin{aligned} \int (3x^2 - 2x)(x^3 - x^2 + 1)^3 dx &= \int (x^3 - x^2 + 1)'(x^3 - x^2 + 1)^3 dx \\ &= \frac{1}{4}(x^3 - x^2 + 1)^4 + C \end{aligned}$$

置換積分をきちんと書くと:

$t = x^3 - x^2 + 1$ とおく。 $\frac{dt}{dx} = 3x^2 - 2x$ より、 $dt = (3x^2 - 2x)dx$ なので、

$$\begin{aligned} \int (3x^2 - 2x)(x^3 - x^2 + 1)^3 dx &= \int t^3 dt \\ &= \frac{1}{4}t^4 + C \\ &= \frac{1}{4}(x^3 - x^2 + 1)^4 + C \end{aligned}$$

$$(1-6) \int \frac{3x^2 - 2x}{x^3 - x^2 + 1} dx$$

省略したやり方:

$$\begin{aligned} \int \frac{3x^2 - 2x}{x^3 - x^2 + 1} dx &= \int \frac{(x^3 - x^2 + 1)'}{x^3 - x^2 + 1} dx \\ &= \log|x^3 - x^2 + 1| + C \end{aligned}$$

置換積分をきちんと書くと:

$t = x^3 - x^2 + 1$ とおく。 $\frac{dt}{dx} = 3x^2 - 2x$ より、 $dt = (3x^2 - 2x)dx$ なので、

$$\begin{aligned} \int \frac{3x^2 - 2x}{x^3 - x^2 + 1} dx &= \int \frac{dt}{t} \\ &= \log|t| + C \\ &= \log|x^3 - x^2 + 1| + C \end{aligned}$$

$$(1-7) \int \cos x(\sin^2 x + \sin x + 1) dx$$

省略したやり方:

$$\int \cos x(\sin^2 x + \sin x + 1) dx = \int (\sin x)'(\sin^2 x + \sin x + 1) dx$$

$$= \frac{1}{3} \sin^3 x + \frac{1}{2} \sin^2 x + \sin x + C$$

置換積分をきちんと書くと：

$t = \sin x$ とおく。 $\frac{dt}{dx} = \cos x$ より、 $dt = \cos x dx$ なので、

$$\begin{aligned} \int \cos x (\sin^2 x + \sin x + 1) dx &= \int (t^2 + t + 1) dt \\ &= \frac{1}{3} t^3 + \frac{1}{2} t^2 + t + C \\ &= \frac{1}{3} \sin^3 x + \frac{1}{2} \sin^2 x + \sin x + C \end{aligned}$$

(1-8)

$$\begin{aligned} \int \frac{(\log x)^3}{x} dx &= \int (\log x)^3 (\log x)' dx \\ &= \frac{1}{4} (\log x)^4 + C \end{aligned}$$

(1-9)

$$\begin{aligned} \int \tan x dx &= \int \frac{\sin x}{\cos x} dx \\ &= - \int \frac{-\sin x}{\cos x} dx \\ &= - \int \frac{(\cos x)'}{\cos x} dx \\ &= - \log |\cos x| + C \end{aligned}$$

(1-10)

$$\begin{aligned} \int \cos x e^{\sin x} dx &= \int (\sin x)' e^{\sin x} dx \\ &= e^{\sin x} + C \end{aligned}$$

(1-11)

$$\begin{aligned} \int x \sin x dx &= \int x (-\cos x)' dx \\ &= x(-\cos x) - \int (x)'(-\cos x) dx \\ &= -x \cos x + \int \cos x dx \\ &= -x \cos x + \sin x + C \end{aligned}$$

(1-12)

$$\begin{aligned} \int x \log x dx &= \int \left(\frac{1}{2}x^2\right)' \log x dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 \log x - \int \frac{1}{2}x^2 (\log x)' dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 \log x - \int \frac{1}{2}x^2 \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 \log x - \int \frac{1}{2}x dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 \log x - \frac{1}{4}x^2 + C \end{aligned}$$

(1-13)

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x \log x} dx &= \int \frac{(\log x)'}{\log x} dx \\ &= \log |\log x| + C\end{aligned}$$

(1-14)

$$\begin{aligned}\int \log x dx &= \int (x)' \log x dx \\ &= x \log x - \int x (\log x)' dx \\ &= x \log x - \int x \frac{1}{x} dx \\ &= x \log x - \int dx \\ &= x \log x - x + C\end{aligned}$$

(1-15) $\int \frac{1}{x^2 - 1} dx$

$\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{(x+1)(x-1)}$ を部分分数分解する。

$\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1}$ という形において、 a と b を決定する。

$$\begin{aligned}\frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1} &= \frac{a(x-1) + b(x+1)}{(x+1)(x-1)} \\ &= \frac{(a+b)x + (-a+b)}{x^2 - 1}\end{aligned}$$

となるので、恒等式 $1 = (a+b)x + (-a+b)$ において係数を比較して、

$$\begin{aligned}a + b &= 0 \\ -a + b &= 1\end{aligned}$$

を得る。これを解いて、 $a = -1/2$, $b = 1/2$ となるので結局、

$$\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right)$$

がわかる。

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2 - 1} dx &= \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} (\log |x-1| - \log |x+1|) + C \\ &= \frac{1}{2} \log \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C\end{aligned}$$

(1-16) $\int e^x \sin x dx$

部分積分による方法：

$I = \int e^x \sin x dx$ とおく。

$$I = \int (e^x)' \sin x dx$$

$$\begin{aligned}
&= e^x \sin x - \int e^x (\sin x)' dx \\
&= e^x \sin x - \int e^x \cos x dx \\
&= e^x \sin x - \int (e^x)' \cos x dx \\
&= e^x \sin x - e^x \cos x + \int e^x (\cos x)' dx \\
&= e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x dx \\
&= e^x \sin x - e^x \cos x - I
\end{aligned}$$

より、 $I = e^x \sin x - e^x \cos x - I$ を I について解いて、

$$I = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x)$$

を得る。

オイラーの公式による方法：

$$\begin{aligned}
\int e^x \cos x dx + i \int e^x \sin x dx &= \int e^x (\cos x + i \sin x) dx \\
&= \int e^x e^{ix} dx \\
&= \int e^{(1+i)x} dx \\
&= \frac{1}{1+i} e^{(1+i)x} \\
&= \frac{1-i}{2} e^x (\cos x + i \sin x) \\
&= \frac{1}{2} e^x \{(\sin x + \cos x) + i(\sin x - \cos x)\}
\end{aligned}$$

より、実部と虚部を比較して、

$$\begin{aligned}
\int e^x \cos x dx &= \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) \\
\int e^x \sin x dx &= \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x)
\end{aligned}$$

を得る。

問題 2 以下の定積分を計算せよ。

(2-1)

$$\begin{aligned}
\int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx &= \int_{\alpha}^{\beta} \{x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta\} dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(\alpha + \beta)x^2 + \alpha\beta x \right]_{\alpha}^{\beta} \\
&= \left(\frac{1}{3}\beta^3 - \frac{1}{2}(\beta + \alpha)\beta^2 + \beta^2\alpha \right) - \left(\frac{1}{3}\alpha^3 - \frac{1}{2}(\beta + \alpha)\alpha^2 + \beta\alpha^2 \right) \\
&= \frac{1}{3}(\beta^3 - \alpha^3) - \frac{1}{2}(\beta + \alpha)(\beta^2 - \alpha^2) + \beta\alpha(\beta - \alpha)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{3}(\beta - \alpha)(\beta^2 + \beta\alpha + \alpha^2) - \frac{1}{2}(\beta + \alpha)^2(\beta - \alpha) + \beta\alpha(\beta - \alpha) \\
&= \frac{1}{6}(\beta - \alpha)\{2(\beta^2 + \beta\alpha + \alpha^2) - 3(\beta + \alpha)^2 + 6\beta\alpha\} \\
&= \frac{1}{6}(\beta - \alpha)(-\beta^2 + 2\beta\alpha - \alpha^2) \\
&= -\frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3
\end{aligned}$$

(2-2)

$$\int_0^\pi \sin x dx = [-\cos x]_0^\pi = -\cos \pi + \cos 0 = 2$$

(2-3)

$$\int_0^\infty e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^\infty.$$

ここで、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} = 0$$

より、

$$\int_0^\infty e^{-x} dx = 1.$$

(2-4)

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty x e^{-x^2} dx &= \int_0^\infty \left(-\frac{1}{2}\right) (-2x) e^{-x^2} dx \\
&= \int_0^\infty \left(-\frac{1}{2}\right) (-x^2)' e^{-x^2} dx \\
&= \left(-\frac{1}{2}\right) [e^{-x^2}]_0^\infty \\
&= \left(-\frac{1}{2}\right) (0 - 1) \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

(2-5)

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty x e^{-x} dx &= \int_0^\infty x (-e^{-x})' dx \\
&= [x(-e^{-x})]_0^\infty - \int_0^\infty (x)' (-e^{-x}) dx \\
&= -[x e^{-x}]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x} dx \\
&= -[x e^{-x}]_0^\infty - [e^{-x}]_0^\infty
\end{aligned}$$

ここで、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x e^{-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x)'}{(e^x)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x e^{-x} = 0 \times 1 = 0$$

より、

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} x e^{-x} dx &= -[x e^{-x}]_0^{\infty} - [e^{-x}]_0^{\infty} \\ &= (0 - 0) - (0 - 1) = 1\end{aligned}$$

(2-6)

$$\begin{aligned}I &= \int_0^{\infty} e^{-x} \sin x dx = \int_0^{\infty} (-e^{-x})' \sin x dx = [-e^{-x} \sin x]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-x} \cos x dx \\ &= \int_0^{\infty} e^{-x} \cos x dx = \int_0^{\infty} (-e^{-x})' \cos x dx \\ &= [-e^{-x} \cos x]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} e^{-x} \sin x dx = 1 - I\end{aligned}$$

より、 $I = 1 - I$ なので $I = \frac{1}{2}$ を得る。

問題 3 関数 $f(x)$ が

$$f(x) = x - \int_0^1 f(x) dx$$

を満たすとき、 $f(x)$ を求めよ。

定積分 $\int_0^1 f(x) dx$ は定数なので、 $a = \int_0^1 f(x) dx$ とおくと、 $f(x) = x - a$ なので、

$$a = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (x - a) dx = \left[\frac{1}{2} x^2 - ax \right]_0^1 = \frac{1}{2} - a$$

より、 $a = \frac{1}{4}$ を得る。

問題 4 2つの不定積分

$$A = \int e^{ax} \cos bxdx, \quad B = \int e^{ax} \sin bxdx$$

を求めたい。ただし、 a, b は定数とする。

(4-1) 部分積分することにより、 A を B の式で、 B を A の式で表せ。

$$\begin{aligned}A &= \int e^{ax} \cos bxdx = \frac{1}{a} \int (e^{ax})' \cos bxdx = \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a} B, \\ B &= \int e^{ax} \sin bxdx = \frac{1}{a} \int (e^{ax})' \sin bxdx = \frac{1}{a} e^{ax} \sin bx - \frac{b}{a} A.\end{aligned}$$

(4-2) 上で求めた A, B に対する連立方程式を解くことにより、 A, B を求めよ。

$$\begin{aligned}A &= \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a} B = \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a} \left(\frac{1}{a} e^{ax} \sin bx - \frac{b}{a} A \right), \\ a^2 A &= a e^{ax} \cos bx + b (e^{ax} \sin bx - bA), \\ A &= \frac{1}{a^2 + b^2} e^{ax} (a \cos bx + b \sin bx).\end{aligned}$$

同様に、

$$B = \frac{1}{a^2 + b^2} e^{ax} (-b \cos bx + a \sin bx).$$

(4-3) 積分 $\int e^{(a+ib)x} dx$ を計算し、実部と虚部をとることにより A, B を求めよ。

$$\begin{aligned} \int e^{(a+ib)x} dx &= \frac{1}{a+ib} e^{(a+ib)x} = \frac{1}{a+ib} e^{ax} e^{ibx} = \frac{1}{a+ib} e^{ax} (\cos bx + i \sin bx) \\ &= \frac{1}{a^2 + b^2} e^{ax} (a - ib)(\cos bx + i \sin bx) \\ &= \frac{1}{a^2 + b^2} e^{ax} \{(a \cos bx + b \sin bx) + i(-b \cos bx + a \sin bx)\}. \end{aligned}$$

ここで、 $\int e^{(a+ib)x} dx = A + iB$ なので、実部と虚部を比べて上と同じ結果を得る。