数学II　第1回　微分積分学の基本定理

2014年9月16日　　担当:佐藤 純

問題1 以下の関数 $f(x)$ の原始関数 $F(x)$ を求めよ。

(1-1) $f(x) = 2$　　$F(x) = 2x$

(1-2) $f(x) = x$　　$F(x) = \frac{1}{2}x^2$

(1-3) $f(x) = \frac{1}{x^2}$　　$F(x) = -\frac{1}{x}$

(1-4) $f(x) = \sqrt{x}$　　$F(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x}$

(1-5) $f(x) = \sin x$　　$F(x) = -\cos x$

(1-6) $f(x) = \cos x$　　$F(x) = \sin x$

(1-7) $f(x) = e^x$　　$F(x) = e^x$

(1-8) $f(x) = \frac{1}{x}$　　$F(x) = \log x$

問題2 区間 $0 \leq x \leq \pi$ における $f(x) = \sin x$ のグラフと、
x 軸に囲まれた部分の面積 S を区分求積法で計算する。
区間 $0 \leq x \leq \pi$ を N 分割し、$\Delta x = \frac{\pi}{N}$, $x_n = n\Delta x = \frac{\pi}{N}n$ $(n = 0, 1, 2, \cdots, N-1)$ とする。
短冊の面積の和を $S_N = \sum_{n=0}^{N-1} f(x_n)\Delta x$ とすれば、$S = \lim_{N\to\infty} S_N$ となる。

(2-1) オイラーの公式 $e^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$ を使って、$\sin\theta = \frac{e^{\mathrm{i}\theta} - e^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}$ を示せ。

$$\begin{aligned} e^{\mathrm{i}\theta} &= \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta \\ e^{-\mathrm{i}\theta} &= \cos\theta - \mathrm{i}\sin\theta \end{aligned}$$

より、両辺を引き算して、

$$\begin{aligned} e^{\mathrm{i}\theta} - e^{-\mathrm{i}\theta} &= (\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) - (\cos\theta - \mathrm{i}\sin\theta) \\ &= 2\mathrm{i}\sin\theta. \end{aligned}$$

両辺を 2i で割って、与式を得る。

(2-2) 上で示した式と等比級数の和の公式を使って、$S_N = \frac{\pi}{N}\frac{\sin\frac{\pi}{N}}{1-\cos\frac{\pi}{N}}$ を示せ。

$$S_N = \sum_{n=0}^{N-1} f(x_n)\Delta x$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{N-1} \sin\left(\frac{n}{N}\pi\right)\frac{\pi}{N} \\
&= \frac{\pi}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \sin\left(\frac{n}{N}\pi\right) \\
&= \frac{\pi}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \frac{e^{\mathrm{i}\frac{n}{N}\pi} - e^{-\mathrm{i}\frac{n}{N}\pi}}{2\mathrm{i}} \\
&= \frac{\pi}{2\mathrm{i}N}\left(\sum_{n=0}^{N-1} e^{\mathrm{i}\frac{n}{N}\pi} - \sum_{n=0}^{N-1} e^{-\mathrm{i}\frac{n}{N}\pi}\right).
\end{aligned}
$$

ここで、この等比級数を T とすると、

$$
\begin{aligned}
T &= 1 + e^{\mathrm{i}\frac{1}{N}\pi} + e^{\mathrm{i}\frac{2}{N}\pi} + \cdots + e^{\mathrm{i}\frac{N-1}{N}\pi} \\
Te^{\mathrm{i}\frac{\pi}{N}} &= e^{\mathrm{i}\frac{1}{N}\pi} + e^{\mathrm{i}\frac{2}{N}\pi} + \cdots + e^{\mathrm{i}\frac{N-1}{N}\pi} + e^{\mathrm{i}\frac{N}{N}\pi}
\end{aligned}
$$

となる。ここで、$e^{\mathrm{i}\frac{N}{N}\pi} = e^{\mathrm{i}\pi} = -1$ である。上の 2 式を辺々引き算することによって、

$$
(1 - e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{N}})T = 1 - (-1) = 2
$$

を得る。結局、この等比級数は

$$
T = \sum_{n=0}^{N-1} e^{\mathrm{i}\frac{n}{N}\pi} = \frac{2}{1 - e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{N}}}
$$

となる。全く同様に、

$$
\sum_{n=0}^{N-1} e^{-\mathrm{i}\frac{n}{N}\pi} = \frac{2}{1 - e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{N}}}
$$

を得る。
以上をまとめて、

$$
\begin{aligned}
S_N &= \frac{\pi}{2\mathrm{i}N}\left(\frac{2}{1 - e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{N}}} - \frac{2}{1 - e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{N}}}\right) \\
&= \frac{\pi}{\mathrm{i}N}\left(\frac{1}{1 - e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{N}}} - \frac{1}{1 - e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{N}}}\right) \\
&= \frac{\pi}{\mathrm{i}N}\frac{(1 - e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{N}}) - (1 - e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{N}})}{(1 - e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{N}})(1 - e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{N}})} \\
&= \frac{\pi}{\mathrm{i}N}\frac{e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{N}} - e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{N}}}{2 - (e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{N}} + e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{N}})} \\
&= \frac{\pi}{\mathrm{i}N}\frac{2\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{N}}{2 - 2\cos\frac{\pi}{N}} \\
&= \frac{\pi}{N}\frac{\sin\frac{\pi}{N}}{1 - \cos\frac{\pi}{N}}
\end{aligned}
$$

を得る。

(2-3) 極限 $N \to \infty$ をとることによって、S の値を求めよ。
$\epsilon = \dfrac{\pi}{N}$ とおくと、$N \to \infty$ で $\epsilon \to 0$ なので、

$$
S = \lim_{N\to\infty} S_N
$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{N\to\infty} \frac{\pi}{N} \frac{\sin\frac{\pi}{N}}{1-\cos\frac{\pi}{N}} \\
&= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\epsilon\sin\epsilon}{1-\cos\epsilon}
\end{aligned}
$$

を得る。これは $0/0$ の不定形なので、ロピタルの定理を (繰り返し) 使うと、

$$
\begin{aligned}
S &= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\epsilon\sin\epsilon}{1-\cos\epsilon} \\
&= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{(\epsilon\sin\epsilon)'}{(1-\cos\epsilon)'} \\
&= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\sin\epsilon+\epsilon\cos\epsilon}{\sin\epsilon} \\
&= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{(\sin\epsilon+\epsilon\cos\epsilon)'}{(\sin\epsilon)'} \\
&= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\cos\epsilon+\cos\epsilon-\epsilon\sin\epsilon}{\cos\epsilon} \\
&= \frac{1+1-0}{1} \\
&= 2
\end{aligned}
$$

を得る。

(2-4) $f(x)$ の原始関数 $F(x)$ を求めよ。
$F(x) = -\cos x$

(2-5) 微分積分学の基本定理 $S = F(\pi) - F(0)$ が成り立っていることを確認せよ。
$F(\pi) - F(0) = (-\cos\pi) - (-\cos 0) = 1 + 1 = 2$ より、確かに $S = F(\pi) - F(0) = 2$ が成り立っている。