数学I 中間試験 解答用紙 (1/4)

番号	氏名

問題 1 ⋆ (2 点 ×7=14 点)

1 1	2 ∞	3 0	4 ∞	5 0	6 $\frac{2}{3}$	7 ∞

問題 2 ⋆ (2 点 ×6=12 点)

1 $-\frac{1}{2}$	2 -1	3 $-\frac{1}{2}$	4 $\frac{\pi}{6}$	5 $\frac{5}{6}\pi$	6 $-\frac{\pi}{4}$

問題 3 ⋆ (2 点+3 点+3 点=8 点)

(3-1)

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

(3-2)

$$\begin{aligned}(\cos x)' &= \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\cos x\cos h-\sin x\sin h-\cos x}{h}\\ &= \cos x\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}-\sin x\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}\end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{(\cos h-1)(\cos h+1)}{h(\cos h+1)}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\cos^2 h-1}{h(\cos h+1)}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{-\sin^2 h}{h(\cos h+1)}\\ &= -\left(\lim_{h\to 0}\sin h\right)\left(\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}\right)\left(\lim_{h\to 0}\frac{1}{\cos h+1}\right)\\ &= -0\times 1\times\frac{1}{2}=0,\end{aligned}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}=1$$

より、

$$(\cos x)' = -\sin x$$

を得る。

(3-3)

$$\begin{aligned}(e^x)' &= \lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}\\ &= e^x\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}\\ &= e^x.\end{aligned}$$

問題 4 ⋆ (3 点 ×2=6 点)

(4-1)

$$\begin{aligned}e^{\mathrm{i}(\alpha+\beta)} &= e^{\mathrm{i}\alpha}e^{\mathrm{i}\beta} = (\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)(\cos\beta+\mathrm{i}\sin\beta)\\ &= (\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)\\ &\quad+\mathrm{i}(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)\end{aligned}$$

一方、$e^{\mathrm{i}(\alpha+\beta)} = \cos(\alpha+\beta)+\mathrm{i}\sin(\alpha+\beta)$ なので、

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta)+\mathrm{i}\sin(\alpha+\beta) = &(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)\\ &+\mathrm{i}(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)\end{aligned}$$

である。これの実部と虚部を比べて与式を得る。

(4-2)

$$\cos nx+\mathrm{i}\sin nx = e^{\mathrm{i}nx} = \left(e^{\mathrm{i}x}\right)^n = (\cos x+\mathrm{i}\sin x)^n$$

数学I 中間試験 解答用紙 (2/4)

番号		氏名	

問題 5 ⋆ (2 点 ×3=6 点)

(5-1) $3\alpha - 2\beta = 3(3-2\mathrm{i}) - 2(2+\mathrm{i}) = 9 - 6\mathrm{i} - 4 - 2\mathrm{i} = 5 - 8\mathrm{i}$

(5-2) $\alpha\beta = (3-2\mathrm{i})(2+\mathrm{i}) = 6 + 3\mathrm{i} - 4\mathrm{i} + 2 = 8 - \mathrm{i}$

(5-3) $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{3-2\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}} = \dfrac{(3-2\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}{(2+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})} = \dfrac{6-3\mathrm{i}-4\mathrm{i}-2}{4+1} = \dfrac{4}{5} - \dfrac{7}{5}\mathrm{i}$

問題 6 ⋆ (1 点 ×3+2 点=5 点)

(6-1) $\mathrm{Re}\, z = 2$

(6-2) $\mathrm{Im}\, z = 3$

(6-3) $z^* = 2 - 3\mathrm{i}$

(6-4) $|z| = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13}$

問題 7 ⋆ (2 点 ×3=6 点)

(7-1) $z = 1 + \mathrm{i}$

$$|z| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2},$$
$$z = \sqrt{2}\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}} + \tfrac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\tfrac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\tfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}.$$

(7-2) $z = -3 + \sqrt{3}\mathrm{i}$

$$|z| = \sqrt{(-3)^2 + \sqrt{3}^2} = 2\sqrt{3},$$
$$z = 2\sqrt{3}\left(-\tfrac{\sqrt{3}}{2} + \tfrac{1}{2}\mathrm{i}\right) = 2\sqrt{3}\left(\cos\tfrac{5\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\tfrac{5\pi}{6}\right) = 2\sqrt{3}e^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}.$$

(7-3) $z = -2\mathrm{i}$

$$|z| = \sqrt{0^2 + (-2)^2} = 2,$$
$$z = 2\left(-\mathrm{i}\right) = 2\left(\cos\left(-\tfrac{\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\tfrac{\pi}{2}\right)\right) = 2e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$$

数学I 中間試験 解答用紙 (3/4)

番号	氏名

問題 8 $(\star, \star, \star\star\star)$ (2 点+2 点+3 点=7 点)

(8-1) α^6

$\alpha = 2e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ より、

$$\alpha^6 = (2e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}})^6 = 2^6(e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}})^6 = 2^6 e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}\times 6} = 64e^{2\pi\mathrm{i}} = 64$$

(8-2) $\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{12}$

$\alpha = 2e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$, $\beta = \sqrt{2}e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ より、
$\dfrac{\alpha}{\beta} = \sqrt{2}e^{\mathrm{i}(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})} = \sqrt{2}e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}$ を得る。これより、

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{12} = \left(\sqrt{2}e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}\right)^{12} = \left(\sqrt{2}\right)^{12}\left(e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}\right)^{12}$$
$$= \left(\sqrt{2}\right)^{12} e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}\times 12} = 2^6 e^{\mathrm{i}\pi} = -64$$

(8-3) $\beta^{99} - (\beta^*)^{99}$

$$\beta^{99} = \left(\sqrt{2}e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)^{99} = \sqrt{2}^{99}\left(e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)^{99} = 2^{\frac{99}{2}}e^{\mathrm{i}\frac{99\pi}{4}},$$
$$(\beta^*)^{99} = \left(\sqrt{2}e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)^{99} = \sqrt{2}^{99}\left(e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)^{99} = 2^{\frac{99}{2}}e^{-\mathrm{i}\frac{99\pi}{4}}$$

より、

$$\begin{aligned}
\beta^{99} - (\beta^*)^{99} &= 2^{\frac{99}{2}}(e^{\mathrm{i}\frac{99\pi}{4}} - e^{-\mathrm{i}\frac{99\pi}{4}}) \\
&= 2^{\frac{99}{2}}\left(2\mathrm{i}\sin\frac{99\pi}{4}\right) \\
&= 2^{\frac{101}{2}}\mathrm{i}\sin\left(24\pi + \frac{3\pi}{4}\right) \\
&= 2^{\frac{101}{2}}\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{4} \\
&= 2^{\frac{101}{2}}\mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{2}} \\
&= 2^{50}\mathrm{i}.
\end{aligned}$$

問題 9 $(\star, \star, \star\star\star)$ (2 点+2 点+3 点=7 点)

(9-1) $\dfrac{1}{z} = z^*$ を示せ。

$zz^* = |z|^2 = 1$ より直ちに $\dfrac{1}{z} = z^*$ を得る。

(9-2) $\dfrac{z}{1+z^2}$ は実数になることを示せ。

$$\frac{z}{1+z^2} = \frac{1}{\frac{1}{z}+z} = \frac{1}{z^*+z}$$

$z + z^*$ は実数なので、証明終。

(9-3) 任意の複素数 α に対し、$|z-\alpha| = |\alpha^* z - 1|$ が成り立つことを示せ。

$$(\text{右辺}) = |\alpha^* z - 1| = \left|z\left(\alpha^* - \frac{1}{z}\right)\right| = |z(\alpha^* - z^*)|$$
$$= |z|\,|\alpha^* - z^*| = |\alpha^* - z^*| = |(\alpha - z)^*| = |\alpha - z|$$
$$= |z - \alpha| = (\text{左辺})$$

問題 10 $\star\star$ (2 点+3 点+3 点=8 点)

円周率 $\pi =$ 直径 1 の円の円周長

ネイピア数 $e = \lim_{N\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{N}\right)^N$

二次方程式 $x^2 = -1$ の解として形式的に虚数単位 i を導入する

数学I 中間試験 解答用紙 (4/4)

番号		氏名	

問題 11 (⋆⋆, ⋆⋆⋆) (3 点 ×2=6 点)

(11-1) $f(\frac{x}{2}) = \sqrt{f(x)}$ となることを示せ。

$f(x+y) = f(x)f(y)$ において $x = y = \frac{t}{2}$ とおけば、

$$f(\tfrac{t}{2} + \tfrac{t}{2}) = f(\tfrac{t}{2})f(\tfrac{t}{2}),$$
$$f(t) = f(\tfrac{t}{2})^2,$$
$$f(\tfrac{t}{2}) = \sqrt{f(t)}$$

なので、$t = x$ とすれば与式を得る。

(11-2) $f^{-1}(xy) = f^{-1}(x) + f^{-1}(y)$ となることを示せ。

$a = f^{-1}(x)$, $b = f^{-1}(y)$ とおけば、$x = f(a)$, $y = f(b)$ なので、
$f(a+b) = f(a)f(b) = xy$ より、
$f^{-1}(xy) = a + b = f^{-1}(x) + f^{-1}(y)$ を得る。

問題 12 (⋆⋆, ⋆⋆⋆) (3 点 ×2=6 点)

$$\log_{10} 6^{-100} = -100 \log_{10} 6 = -100(\log_{10} 2 + \log_{10} 3) = -77.81\cdots$$

より、

$$-78 < \log_{10} 6^{-100} < -77,$$
$$\log_{10} 10^{-78} < \log_{10} 6^{-100} < \log_{10} 10^{-77},$$
$$10^{-78} < 6^{-100} < 10^{-77}$$

なので、小数点以下第 78 位に初めてゼロでない数が現れる。

$$10^{78} \times 6^{-100} = 10^{78-77.81\cdots} = 10^{0.19\cdots},$$
$$\log_{10} 1 = 0, \quad \log_{10} 2 = 0.3010\cdots,$$
$$\log_{10} 1 < 0.19 < \log_{10} 2,$$
$$1 < 10^{0.19\cdots} < 2,$$
$$1 < 10^{78} \times 6^{-100} < 2,$$

より、小数点以下第 78 位の数は、1 である。

問題 13 (⋆, ⋆⋆, ⋆⋆⋆) (3 点 ×3=9 点)

(13-1) $z^6 = 1$

$z^6 = 1 = e^{2n\pi \mathrm{i}}$ より、$z = e^{\mathrm{i}\frac{n\pi}{3}}$ なので、
$n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ として、
$z = \pm 1, \dfrac{\pm 1 \pm \sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$ を得る。

(13-2) $z^3 = \mathrm{i}$

$z^3 = \mathrm{i} = e^{\mathrm{i}(\frac{\pi}{2} + 2n\pi)}$ より、$z = e^{\mathrm{i}(\frac{\pi}{6} + \frac{2n\pi}{3})}$ なので、
$n = 0, 1, 2$ として、$z = e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}, e^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}, e^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{2}}$, すなわち
$z = -\mathrm{i}, \dfrac{\pm\sqrt{3} + \mathrm{i}}{2}$ を得る。

(13-3) $z^2 = 1 + \mathrm{i}$

$z^2 = 1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}e^{\mathrm{i}(\frac{\pi}{4} + 2n\pi)}$ より、$z = 2^{\frac{1}{4}}e^{\mathrm{i}(\frac{\pi}{8} + n\pi)}$
なので、$n = 0, 1$ として、
$z = \pm 2^{\frac{1}{4}}e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{8}} = \pm 2^{\frac{1}{4}}(\cos\frac{\pi}{8} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{8})$ を得る。

ここで、

$$\cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1 + \cos\frac{\pi}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}}{2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{2} + 1}{2\sqrt{2}}}$$
$$= 2^{-\frac{3}{4}}\sqrt{\sqrt{2} + 1},$$
$$\sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1 - \cos\frac{\pi}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}{2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{2} - 1}{2\sqrt{2}}}$$
$$= 2^{-\frac{3}{4}}\sqrt{\sqrt{2} - 1},$$

より、

$$z = \pm 2^{\frac{1}{4}} 2^{-\frac{3}{4}} \left(\sqrt{\sqrt{2} + 1} + \mathrm{i}\sqrt{\sqrt{2} - 1}\right)$$
$$= \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\sqrt{2} + 1} + \mathrm{i}\sqrt{\sqrt{2} - 1}\right)$$

を得る。