問題 1 $\star$ (2 点 ×7=14 点)

以下の極限値を求めよ。

(1-1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(2x+1)$　(1-2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(2x+1)$　(1-3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}$　(1-4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}$

(1-5) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{3x^2+1}$　(1-6) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{3x^2+1}$　(1-7) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3}{3x^2+1}$

問題 2 $\star$ (2 点 ×6=12 点)

次の値を求めよ。答えが複数ある場合はひとつだけでよい。

(2-1) $\cos\dfrac{2}{3}\pi$　**(2-2)** $\tan\dfrac{7}{4}\pi$　**(2-3)** $\sin\dfrac{7\pi}{6}$

(2-4) $\sin^{-1}\dfrac{1}{2}$　**(2-5)** $\cos^{-1}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$　**(2-6)** $\tan^{-1}(-1)$

問題 3 $\star$ (2 点+3 点+3 点=8 点)

(3-1) 関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ の定義式を書け。

(3-2) $f(x)=\cos x$ の導関数を、上の定義式にしたがって計算せよ。

(3-3) $f(x)=e^x$ の導関数を、上の定義式にしたがって計算せよ。

ただし、公式 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}=1$, $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1$ を使ってよい。

問題 4 $\star$ (3 点 ×2=6 点)

オイラーの公式 $e^{\mathrm{i}x}=\cos x+\mathrm{i}\sin x$ を使って、以下の式を証明せよ。

(4-1) $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$
$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

(4-2) $\cos nx+\mathrm{i}\sin nx=(\cos x+\mathrm{i}\sin x)^n$

問題 5 $\star$ (2 点 ×3=6 点)

$\alpha=3-2\mathrm{i}$, $\beta=2+\mathrm{i}$ とする。以下の式を、$x+\mathrm{i}y$, (x, y は実数) の形に計算せよ。

(5-1) $3\alpha-2\beta$

(5-2) $\alpha\beta$

(5-3) $\dfrac{\alpha}{\beta}$

数学I　中間試験　(2/2)

2014年6月4日　担当：佐藤 純

問題 6 $\star$ (1 点 ×3+2 点=5 点)

$z = 2 + 3\mathrm{i}$ とするとき、以下の値を求めよ。

(6-1) 実部 $\mathrm{Re}\, z$　**(6-2)** 虚部 $\mathrm{Im}\, z$　**(6-3)** 複素共役 z^*　**(6-4)** 絶対値 $|z|$

問題 7 $\star$ (2 点 ×3=6 点)

以下の複素数を極形式 $re^{\mathrm{i}\theta}$ で表せ。

(7-1) $1 + \mathrm{i}$　**(7-2)** $-3 + \sqrt{3}\mathrm{i}$　**(7-3)** $-2\mathrm{i}$

問題 8 ($\star$, $\star$, $\star\star\star$) (2 点+2 点+3 点=7 点)

$\alpha = 1 + \sqrt{3}\mathrm{i},\ \beta = 1 + \mathrm{i}$ とするとき、以下の値を求めよ。

(8-1) α^6　**(8-2)** $\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{12}$　**(8-3)** $\beta^{99} - (\beta^*)^{99}$

問題 9 ($\star$, $\star$, $\star\star\star$) (2 点+2 点+3 点=7 点)

複素数 z が $|z| = 1$ を満たすとする。

(9-1) $\dfrac{1}{z} = z^*$ を示せ。　**(9-2)** $\dfrac{z}{1+z^2}$ は実数になることを示せ。

(9-3) 任意の複素数 α に対し、$|z - \alpha| = |\alpha^* z - 1|$ が成り立つことを示せ。

問題 10 $\star\star$ (2 点+3 点+3 点=8 点)

円周率 π, ネイピア数 e, 虚数単位 i とは何か？定義を述べよ。

問題 11 ($\star\star$, $\star\star\star$) (3 点 ×2=6 点)

関数 $f(x)$ が $f(x+y) = f(x)f(y)$ を満たすとする。

(11-1) $f(\frac{x}{2}) = \sqrt{f(x)}$ となることを示せ。

(11-2) $f^{-1}(xy) = f^{-1}(x) + f^{-1}(y)$ となることを示せ。

問題 12 ($\star\star$, $\star\star\star$) (3 点 ×2=6 点)

6^{-100} を小数で表したとき、小数点以下第何位に初めてゼロでない数が現れるか？また、その数字は何か？ただし、$\log_{10} 2 = 0.3010\cdots$, $\log_{10} 3 = 0.4771\cdots$ を使ってよい。

問題 13 ($\star$, $\star\star$, $\star\star\star$) (3 点 ×3=9 点)

以下の方程式を解け。ただし、$z = x + \mathrm{i}y$ (x, y は実数) の形に解を表すこと。

(13-1) $z^6 = 1$　**(13-2)** $z^3 = \mathrm{i}$　**(13-3)** $z^2 = 1 + \mathrm{i}$