数学 I　期末試験

2014 年 7 月 17 日　　担当：佐藤 純

1. 3 次元空間内の 3 点 O, A, B の座標を
O:(0, 0, 0), A:(−1, 1, 2), B:(1, −2, 1) とする。
ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ を、$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で定める。

(1) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ および外積 $\vec{a}\times\vec{b}$ を計算せよ。

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = -1\times 1 + 1\times(-2) + 2\times 1 = -1-2+2 = \boxed{-1},$$

$$\begin{aligned}\vec{a}\times\vec{b} &= (1\times 1 - 2\times(-2),\\ &\quad 2\times 1-(-1)\times 1,\\ &\quad -1\times(-2)-1\times 1)\\ &= \boxed{(5,3,1)}\end{aligned}$$

(2) $\cos\angle\mathrm{AOB}$ の値を求めよ。

$$\cos\angle\mathrm{AOB} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{-1}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \boxed{-\frac{1}{6}}$$

(3) 3 点 O, A, B を通る平面の方程式を求めよ。

$$\boxed{5x+3y+z=0}$$

(4) 三角形 OAB の面積を求めよ。

$$\triangle\mathrm{OAB} = \frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}| = \frac{1}{2}\sqrt{5^2+3^2+1^2} = \boxed{\frac{\sqrt{35}}{2}}$$

2. 以下で与えられた関数 y を x で微分し、y' を求めよ。

(1) $y=(x^2+1)^5$

$$y' = 5(x^2+1)^4(x^2+1)' = \boxed{10x(x^2+1)^4}$$

(2) $y=\sqrt{x^2+3}$

$$y' = \frac{1}{2}(x^2+3)^{-\frac{1}{2}}(x^2+3)' = \boxed{\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}}$$

(3) $y=e^{-x^2}$

$$y' = e^{-x^2}(-x^2)' = \boxed{-2xe^{-x^2}}$$

(4) $y=\sin^{-1}x$

$$\begin{aligned}&x=\sin y,\\ &\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \cos y = \sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-x^2},\\ &(\sin^{-1}x)' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}\end{aligned}$$

(5) $y=(\log x)^3$

$$\begin{aligned}\left\{(\log x)^3\right\}' &= 3(\log x)^2(\log x)'\\ &= \boxed{\frac{3(\log x)^2}{x}}\end{aligned}$$

(6) $y=x^x$

$$\begin{aligned}y &= x^x = e^{\log x^x} = e^{x\log x},\\ (x^x)' &= (e^{x\log x})' = e^{x\log x}(x\log x)'\\ &= x^x\left\{(x)'\log x + x(\log x)'\right\} = \boxed{(1+\log x)x^x}\end{aligned}$$

3. **(1)** e^x, $\cos x$, $\sin x$ をマクローリン展開し、
最初の第 4 項までを具体的に書き下せ。

$f(x)=e^x,\ f(0)=1,$
$f'(x)=e^x,\ f'(0)=1,$
$f''(x)=e^x,\ f''(0)=1,$
$f'''(x)=e^x,\ f'''(0)=1,$

$$\boxed{e^x = 1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots}$$

$f(x)=\sin x,\ f(0)=0,$
$f'(x)=\cos x,\ f'(0)=1,$
$f''(x)=-\sin x,\ f''(0)=0,$
$f'''(x)=-\cos x,\ f'''(0)=-1,$
以下この 4 つの繰り返し

$$\boxed{\sin x = x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\cdots}$$

同様に、$\boxed{\cos x = 1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\cdots}$

(2) e^x の展開式に $x=\mathrm{i}\theta$ を代入することにより、
オイラーの公式 $e^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$ を示せ。

$$\boxed{\begin{aligned}e^x &= 1+\mathrm{i}\theta+\frac{1}{2}(\mathrm{i}\theta)^2+\frac{1}{3!}(\mathrm{i}\theta)^3+\frac{1}{4!}(\mathrm{i}\theta)^4+\frac{1}{5!}(\mathrm{i}\theta)^5+\cdots\\ &= 1+\mathrm{i}\theta-\frac{1}{2}\theta^2-\mathrm{i}\frac{1}{3!}\theta^3+\frac{1}{4!}\theta^4+\mathrm{i}\frac{1}{5!}\theta^5\cdots\\ &= \left(1-\frac{1}{2}\theta^2+\frac{1}{4!}\theta^4+\cdots\right)+\mathrm{i}\left(\theta-\frac{1}{3!}\theta^3+\frac{1}{5!}\theta^5+\cdots\right)\\ &= \cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta\end{aligned}}$$

4. 以下の極限値を計算せよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{(\log x)'}{(x)'} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = \boxed{0}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}xe^{-x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{(x)'}{(e^x)'} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x} = \boxed{0}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}$

5. π の値を逆正接関数の級数展開から求めたい。

(1) $\tan\alpha = \frac{1}{5}$ のとき、$\tan 2\alpha, \tan 4\alpha$ の値を求めよ。

sin, cos に対する加法定理

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta,$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta,$$

と、$\tan\alpha = \sin\alpha/\cos\alpha$ を使えば、tan に対する加法定理

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}$$
$$= \frac{\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} + \frac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} - \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} = \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1 - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\frac{\sin\beta}{\cos\beta}}$$
$$= \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

を得る。ここで、$\beta = \alpha$ を代入すれば tan に対する倍角の公式

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}.$$

を得る。これより、

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{1}{25}} = \boxed{\frac{5}{12}}$$
$$\tan 4\alpha = \frac{2\tan 2\alpha}{1-\tan^2 2\alpha} = \frac{\frac{5}{6}}{1-\frac{25}{144}} = \boxed{\frac{120}{119}}$$

を得る。

(2) $4\tan^{-1}\frac{1}{5} - \tan^{-1}\frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$ を示せ。

$\tan\alpha = \frac{1}{5}$ のとき、$\alpha = \tan^{-1}\frac{1}{5}$ となる。

$$\tan\left(4\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan 4\alpha + \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)}{1 - \tan 4\alpha\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$$
$$= \frac{\frac{120}{119} - 1}{1 + \frac{120}{119}} = \frac{120-119}{119+120} = \frac{1}{239}$$

より、$\tan^{-1}\frac{1}{239} = 4\alpha - \frac{\pi}{4}$ なので、$\alpha = \tan^{-1}\frac{1}{5}$ に注意すれば与式を得る。

(3) $\tan^{-1}x$ を x の 3 次までマクローリン展開せよ。

$f(x) = \tan^{-1}x,\ f(0) = 0,$
$f'(x) = (1+x^2)^{-1},\ f'(0) = 1,$
$f''(x) = -2x(1+x^2)^{-2},\ f''(0) = 0,$
$f'''(x) = -2(1+x^2)^{-2} + 8x^2(1+x^2)^{-3},\ f'''(0) = -2,$
より、$\boxed{\tan^{-1}x = x - \frac{1}{3}x^3 + \cdots}$

(4) 上の結果から π の値を小数第 2 位まで計算せよ。

関係式 $\pi = 16\tan^{-1}\frac{1}{5} - 4\tan^{-1}\frac{1}{239}$ から π の値を計算する。

$$16\tan^{-1}\frac{1}{5} = \frac{16}{5} - \frac{16}{3\cdot 5^3} + \cdots$$
$$= 3.2 - 0.042666\cdots + \cdots = 3.1573333\cdots,$$
$$4\tan^{-1}\frac{1}{239} = \frac{4}{239} + \cdots = 0.016736\cdots$$

より、$\pi = 3.1573333 - 0.016736\cdots = \boxed{3.14}\cdots$ を得る。

6. $10^{0.3}$ の値を小数第 3 位まで計算せよ。

$$10^{0.3} = 10^{\frac{3}{10}} = 10^{3\times\frac{1}{10}} = (10^3)^{\frac{1}{10}} = 1000^{\frac{1}{10}}$$

ここで、$2^{10} = 1024$ が 1000 に近い値であることを使って、

$$10^{0.3} = 1000^{\frac{1}{10}} = \left(2^{10}\frac{1000}{1024}\right)^{\frac{1}{10}} = 2\left(\frac{1000}{1024}\right)^{\frac{1}{10}}$$
$$= 2\left(1 - \frac{24}{1024}\right)^{\frac{1}{10}} = 2\left(1 - \frac{3}{128}\right)^{\frac{1}{10}}$$

と変形できる。

ここで、$f(x) = (1-x)^{\frac{1}{10}}$ をマクローリン展開すると、
$f(x) = (1-x)^{\frac{1}{10}},\ f(0) = 1,$
$f'(x) = -\frac{1}{10}(1-x)^{-\frac{9}{10}},\ f'(0) = -\frac{1}{10},$
$f''(x) = -\frac{9}{100}(1-x)^{-\frac{19}{10}},\ f''(0) = -\frac{9}{100},$
より、$(1-x)^{\frac{1}{10}} = 1 - \frac{1}{10}x - \frac{9}{200}x^2 + \cdots$ となる。
したがって、

$$10^{0.3} = 2\left(1 - \frac{3}{128}\right)^{\frac{1}{10}} = 2\left(1 - \frac{1}{10}\frac{3}{128} - \frac{9}{200}\frac{3^2}{128^2} + \cdots\right)$$
$$= 2 - \frac{3}{640} - \frac{9\times 9}{100\times 128^2} + \cdots$$

ここで、$\frac{9\times 9}{100\times 128^2} < \frac{10\times 10}{100\times 128^2} = \frac{1}{128^2} < \frac{1}{100^2} = 10^{-4}$ より、この項は小数第三位までの値には影響しないので無視して、
$10^{0.3} = 2 - \frac{3}{640} + \cdots = 2 - 0.0046875 + \cdots = \boxed{1.995\cdots}$
を得る。