数学演習 I　第 12 回　関数のグラフ

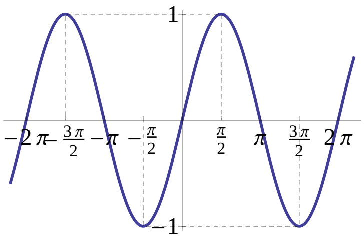
2014 年 7 月 2 日

担当：佐藤 純

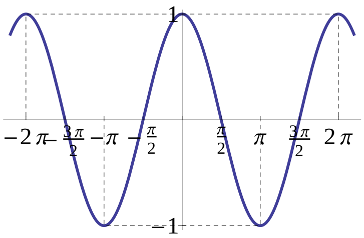
問題 1

以下の関数のグラフを描け。

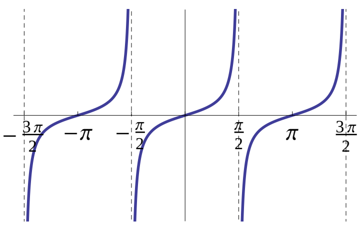
(1-1) $y = \sin x$



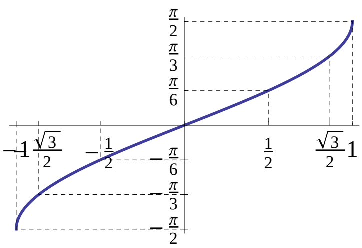
(1-2) $y = \cos x$



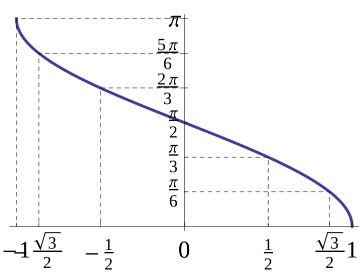
(1-3) $y = \tan x$



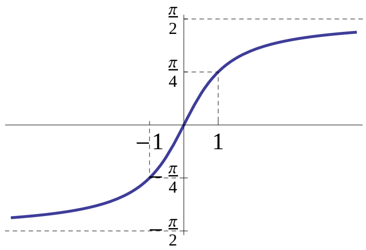
(1-4) $y = \sin^{-1} x$
$(-1 \leq x \leq 1,\ -\pi/2 \leq y \leq \pi/2)$



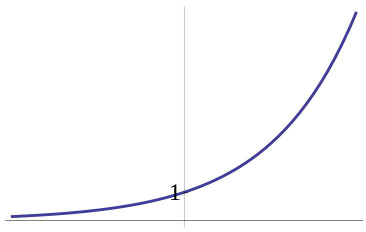
(1-5) $y = \cos^{-1} x$
$(-1 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq \pi)$



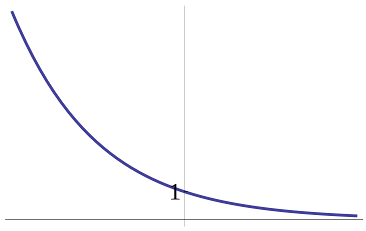
(1-6) $y = \tan^{-1} x$
$(-\infty < x < \infty,\ -\pi/2 < y < \pi/2)$



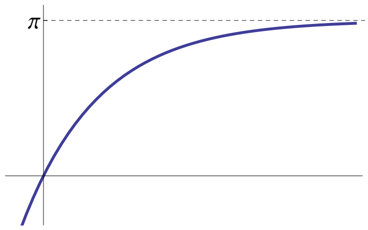
(1-7) $y = e^x$



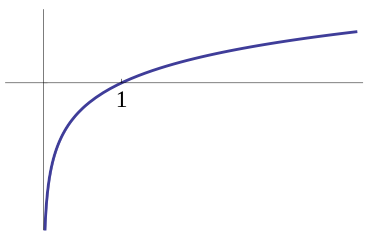
(1-8) $y = e^{-x}$



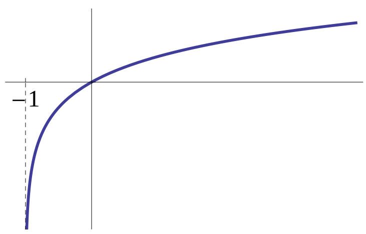
(1-9) $y = \pi(1 - e^{-x})$



(1-10) $y = \log x$



(1-11) $y = \log(1 + x)$



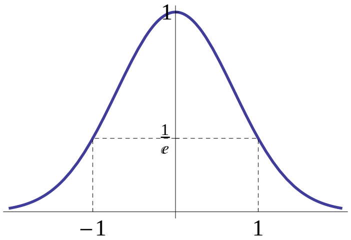
問題 2

以下の関数のグラフを描け。極大極小点がある場合は、その座標も書き込むこと。

(2-1) $y = e^{-x^2}$

$f(-\infty) = f(+\infty) = 0,\ f(0) = 1$

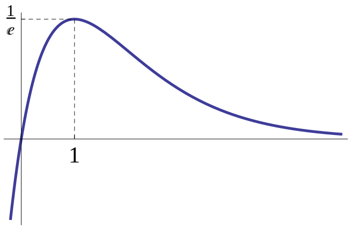
x	$\sim$	0	$\sim$
f'	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$	1	$\searrow$



(2-2) $y = xe^{-x}$

$f(-\infty) = -\infty,\ f(+\infty) = 0,\ f(0) = 0$

x	$\sim$	1	$\sim$
f'	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$	$1/e$	$\searrow$



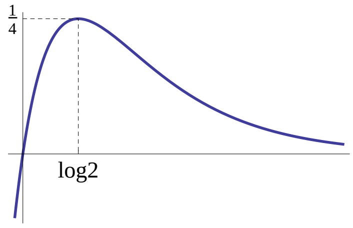
(2-3) $y = e^{-x} - e^{-2x}$

$f(-\infty) = -\infty,\ f(+\infty) = 0,\ f(0) = 0$

x	$\sim$	$\log 2$	$\sim$
f'	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$	$1/4$	$\searrow$

$f'(x) = -e^{-x} + 2e^{-2x} = e^{-x}(2e^{-x} - 1) = 0$ を解くと、

$$e^{-x} = \frac{1}{2},$$
$$-x = \log\frac{1}{2} = -\log 2,$$
$$x = \log 2.$$



(2-4) $y = x^{\frac{1}{x}}\ (x > 0)$

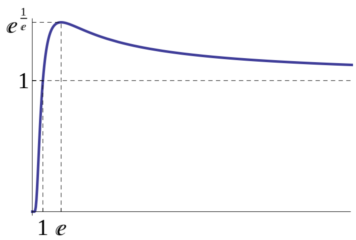
$f(x) = x^{\frac{1}{x}}, \quad g(x) = \log f(x) = \dfrac{\log x}{x}.$

$g(+0) = -\infty,\ g(+\infty) = 0,\ g(1) = 0$

x	$\sim$	e	$\sim$
g'	$+$	0	$-$
g	$\nearrow$	$1/e$	$\searrow$

$f(+0) = e^{-\infty} = 0,\ f(+\infty) = e^0 = 1,$
$f(1) = e^0 = 1$

x	$\sim$	e	$\sim$
f'	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$	$e^{1/e}$	$\searrow$



問題 3

(3-1) 不等式 $\sin x \geq x - \dfrac{x^2}{\pi}$ が成り立つことを示せ。

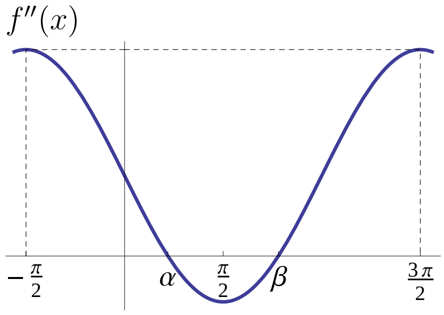
関数 $f(x)$ を $f(x) = \sin x - x + \dfrac{x^2}{\pi}$ で定める。$f(x) \geq 0$ を示せばよい。微分を順に計算すると、

$$f'(x) = \cos x - 1 + \frac{2}{\pi}x,$$
$$f''(x) = -\sin x + \frac{2}{\pi}.$$

まず、$f''(x)$ について調べると、

x	$-\pi/2$	$\sim$	α	$\sim$	β	$3\pi/2$
f''	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$

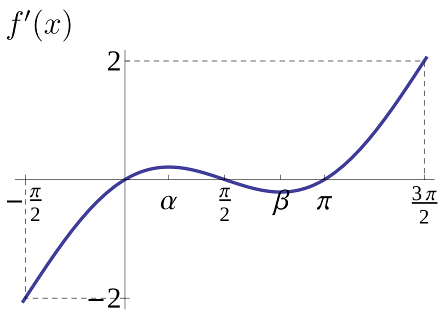
となる。ただし、α と β は $\sin\alpha = \sin\beta = 2/\pi,\ 0 < \alpha < \pi/2,\ \pi/2 < \beta < \pi$ を満たす角度とする。



次に、$f'(x)$ について調べる。$f'(0) = f'(\pi/2) = f'(\pi) = 0$ より、

x	$-\pi/2$	$\sim$	0	$\sim$	α	$\sim$	$\pi/2$	$\sim$	β	$\sim$	π	$\sim$	$3\pi/2$
f''	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
f'	-2	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	2

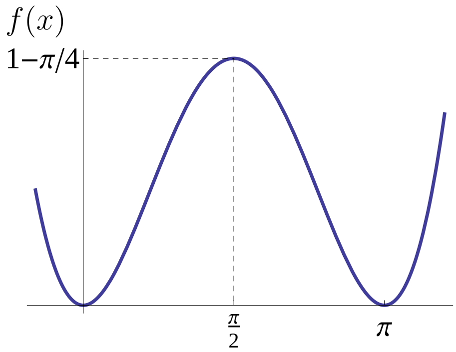
となる。



以上より、$f(x)$ の増減表とグラフを描くと、

x	$\sim$	0	$\sim$	$\pi/2$	$\sim$	π	$\sim$
f'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	0	$\nearrow$	$1-\pi/4$	$\searrow$	0	$\nearrow$

となる。



$x < -\pi/2$ および $x > 3\pi/2$ においては、$-x + x^2/\pi > 1$ なので、常に $f(x) > 0$ となる。以

上により題意は示された。

(3-2) 方程式 $\sin x = x - \dfrac{x^2}{\pi}$ の解を全て求めよ。

前問の結果より、$x = 0, \pi$ が全ての解である。

問題 4

方程式 $e^x = \pi x$ の実数解の個数を求めよ。

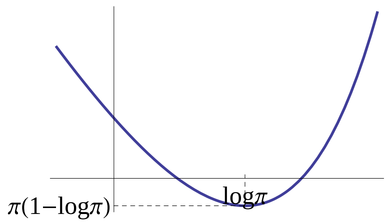
$f(x) = e^x - \pi x$ とする。

$f(-\infty) = +\infty,\ f(+\infty) = +\infty,\ f(0) = 1$

x	$\sim$	$\log\pi$	$\sim$
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	$\pi(1-\log\pi)$	$\nearrow$

$e < \pi$ より、$\log\pi > 1$ なので、$\pi(1-\log\pi) < 0$

より、$f(x)$ のグラフは x 軸と 2 点で交わるので、解の個数は 2 個。



問題 5

e^π と π^e の大小関係を調べたい。ただし、$e = 2.71\cdots$, $\pi = 3.14\cdots$ である。

(5-1) $f(x) = x - e\log x\ \ (x > 0)$ のグラフを描き、$f(\pi) > 0$ を示せ。

$$\lim_{x\to+0} f(x) = +0 - e \times (-\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(1 - e\frac{\log x}{x}\right)$$

ここで、

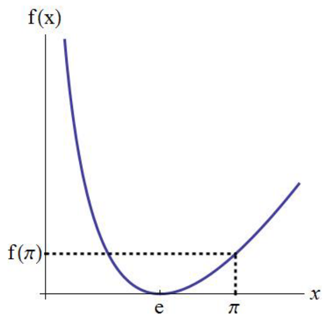
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

なので、

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \times (1-0) = +\infty$$

$f'(x) = 1 - \dfrac{e}{x}$ より、増減表を書くと、

x	0	$\sim$	e	$\sim$	$+\infty$
f'	/	$-$	0	$+$	/
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$



$f(e) = 0$, $x > e$ で $f'(x) > 0$ より、$x > e$ で $f(x) > 0$ である。

したがって、$\pi > e$ より、$f(\pi) > 0$.

(5-2) e^π と π^e の大小関係を決定せよ。

$f(\pi) = \pi - e\log\pi > 0$ より、
$\pi > e\log\pi$ である。
$\pi = \log e^\pi$, $e\log\pi = \log\pi^e$ より、
$\log e^\pi > \log\pi^e$ である。
$\log x$ は $x > 0$ で単調増加関数だから、
$\log e^\pi > \log\pi^e \iff e^\pi > \pi^e$ である。