

問題 1

3次元ベクトル $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を考える。以下の量は、スカラーかベクトルか、答えよ。

(1-1) $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ベクトルとベクトルの内積はスカラー

(1-2) $\vec{a} \times \vec{b}$ ベクトルとベクトルの外積はベクトル

(1-3) $(\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$ $\vec{a} \cdot \vec{b} = \alpha$ はスカラー、 $\alpha\vec{c}$ はベクトルのスカラー倍なのでベクトル

(1-4) $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{d}$ はベクトル、 $\vec{d} \cdot \vec{c}$ は内積なのでスカラー

(1-5) $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{d}$ はベクトル、 $\vec{d} \times \vec{c}$ は外積なのでベクトル

問題 2

3次元空間内の 3 点 O, A, B の座標を, O:(0, 0, 0), A:(1, -3, 2), B:(-1, 1, -2) とする。ベクトル \vec{a}, \vec{b} を、 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}, \vec{b} = \overrightarrow{OB}$ で定める。

(2-1) \vec{a} と \vec{b} の外積 $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ を計算せよ。

$$\begin{aligned} \vec{c} &= ((-3) \times (-2) - 2 \times 1, 2 \times (-1) - 1 \times (-2), 1 \times 1 - (-3) \times (-1)) \\ &= (6 - 2, -2 + 2, 1 - 3) = (4, 0, -2) \end{aligned}$$

(2-2) \vec{c} は \vec{a}, \vec{b} と直交することを示せ。

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{c} &= 1 \times 4 + (-3) \times 0 + 2 \times (-2) = 0, \\ \vec{b} \cdot \vec{c} &= (-1) \times 4 + 1 \times 0 + (-2) \times (-2) = 0. \end{aligned}$$

(2-3) 3 点 O, A, B を通る平面の方程式を求めよ。

求める平面上の任意の点を $Q = (x, y, z)$ とすると、ベクトル \overrightarrow{OQ} は常にベクトル \vec{c} に直交するので、 $\overrightarrow{OQ} \cdot \vec{c} = 4x - 2z = 0$ 。よって、求める平面の方程式は、 $2x - z = 0$ となる。

(2-4) 三角形 OAB の面積を求めよ。

$$\text{三角形 OAB の面積 } S = \frac{1}{2} |\vec{c}| = \frac{1}{2} \sqrt{4^2 + 0^2 + (-2)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{20} = \sqrt{5}.$$

問題 3

3次元ベクトル $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を考える。ベクトルの大きさを、 $a = |\vec{a}|, b = |\vec{b}|, c = |\vec{c}|$ とする。以下の式を証明せよ。

(3-1) $|\vec{a} \times \vec{b}|^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = a^2 b^2$

ベクトル \vec{a}, \vec{b} のなす角を θ とすると、

$$\begin{aligned} |\vec{a} \times \vec{b}| &= ab \sin \theta, \\ \vec{a} \cdot \vec{b} &= ab \cos \theta \end{aligned}$$

なので、

$$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = a^2 b^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = a^2 b^2$$

となる。

$$(3-2) \quad (\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b}) = 2\vec{b} \times \vec{a}$$

$$\begin{aligned} (\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b}) &= \vec{a} \times \vec{a} - \vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{a} - \vec{b} \times \vec{b} \\ &= 0 + \vec{b} \times \vec{a} + \vec{b} \times \vec{a} - 0 \\ &= 2\vec{b} \times \vec{a} \end{aligned}$$

$$(3-3) \quad (\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{b} - \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a}$$

$$\begin{aligned} (\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{b} - \vec{c}) &= \vec{a} \times \vec{b} - \vec{a} \times \vec{c} - \vec{b} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} \\ &= \vec{a} \times \vec{b} + \vec{c} \times \vec{a} - 0 + \vec{b} \times \vec{c} \\ &= \vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a} \end{aligned}$$

$$(3-4) \quad \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \quad \vec{b} = (b_1, b_2, b_3), \quad \vec{c} = (c_1, c_2, c_3),$$

とする。また、

$$\vec{d} = \vec{b} \times \vec{c}, \quad \vec{d} = (d_1, d_2, d_3)$$

とすると、

$$\begin{aligned} d_1 &= b_2 c_3 - b_3 c_2, \\ d_2 &= b_3 c_1 - b_1 c_3, \\ d_3 &= b_1 c_2 - b_2 c_1 \end{aligned}$$

なので、

$$\begin{aligned} \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) &= \vec{a} \times \vec{d} \\ &= (a_2 d_3 - a_3 d_2, a_3 d_1 - a_1 d_3, a_1 d_2 - a_2 d_1) \\ &= (a_2(b_3 c_1 - b_1 c_3) - a_3(b_2 c_3 - b_3 c_2), \\ &\quad a_3(b_1 c_2 - b_2 c_1) - a_1(b_3 c_1 - b_1 c_3), \\ &\quad a_1(b_2 c_3 - b_3 c_2) - a_2(b_1 c_2 - b_2 c_1), \end{aligned}$$

$$a_1(b_3c_1 - b_1c_3) - a_2(b_2c_3 - b_3c_2))$$

となる。また、

$$\begin{aligned} \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}) &= (b_1, b_2, b_3)(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) - (c_1, c_2, c_3)(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) \\ &= (b_1(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) - c_1(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3), \\ &\quad b_2(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) - c_2(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3), \\ &\quad b_3(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) - c_3(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)) \\ &= (a_2(b_1c_2 - b_2c_1) - a_3(b_3c_1 - b_1c_3), \\ &\quad a_3(b_2c_3 - b_3c_2) - a_1(b_1c_2 - b_2c_1), \\ &\quad a_1(b_3c_1 - b_1c_3) - a_2(b_2c_3 - b_3c_2)) \end{aligned}$$

なので、左辺 = 右辺となり、与式を得る。

問題 4

任意の 3 次元ベクトル \vec{a} は、適当な単位ベクトル \vec{n} を使って、 $\vec{a} = \vec{n}(\vec{a} \cdot \vec{n}) + \vec{n} \times (\vec{a} \times \vec{n})$ と表せることを示せ。

前問の結果を使うと、

$$\vec{n} \times (\vec{a} \times \vec{n}) = \vec{a}(\vec{n} \cdot \vec{n}) - \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{a}) = \vec{a}|\vec{n}|^2 - \vec{n}(\vec{a} \cdot \vec{n})$$

となる。ここで、 \vec{n} は単位ベクトルなので $|\vec{n}| = 1$ であることを使うと、

$$\vec{n} \times (\vec{a} \times \vec{n}) = \vec{a} - \vec{n}(\vec{a} \cdot \vec{n})$$

となる。したがって、

$$\text{右辺} = \vec{n}(\vec{a} \cdot \vec{n}) + \vec{n} \times (\vec{a} \times \vec{n}) = \vec{n}(\vec{a} \cdot \vec{n}) + \vec{a} - \vec{n}(\vec{a} \cdot \vec{n}) = \vec{a} = \text{左辺}$$

を得る。