

問題 1

3次元ベクトル  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  を考える。以下の量は、スカラーかベクトルか、答えよ。

(1-1)  $\vec{a} \cdot \vec{b}$

(1-2)  $\vec{a} \times \vec{b}$

(1-3)  $(\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$

(1-4)  $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$

(1-5)  $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$

問題 2

3次元空間内の3点 O, A, B の座標を, O:(0, 0, 0), A:(1, -3, 2), B:(-1, 1, -2) とする。ベクトル  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  を、 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ ,  $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$  で定める。

(2-1)  $\vec{a}$  と  $\vec{b}$  の外積  $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$  を計算せよ。

(2-2)  $\vec{c}$  は  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  と直交することを示せ。

(2-3) 3点 O, A, B を通る平面の方程式を求めよ。

(2-4) 三角形 OAB の面積を求めよ。

問題 3

3次元ベクトル  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  を考える。ベクトルの大きさを、 $a = |\vec{a}|$ ,  $b = |\vec{b}|$ ,  $c = |\vec{c}|$  とする。以下の式を証明せよ。

(3-1)  $|\vec{a} \times \vec{b}|^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = a^2 b^2$

(3-2)  $(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b}) = 2\vec{b} \times \vec{a}$

(3-3)  $(\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{b} - \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a}$

(3-4)  $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$

問題 4

任意の3次元ベクトル  $\vec{a}$  は、適当な単位ベクトル  $\vec{n}$  を使って、 $\vec{a} = \vec{n}(\vec{a} \cdot \vec{n}) + \vec{n} \times (\vec{a} \times \vec{n})$  と表せることを示せ。