数学演習Ⅰ　第９回　ベクトルの内積

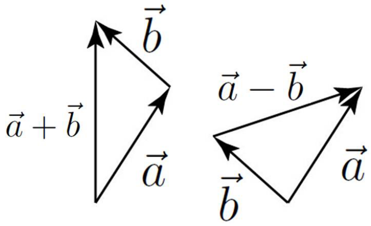
2014年6月11日

担当：佐藤 純

問題１

２次元ベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ が、成分表示で $\vec{a} = (1, 2), \vec{b} = (-1, 1)$ と与えられているとする。

(1-1) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}$ を図示せよ。



(1-2) $3\vec{a} - 2\vec{b}$ を計算せよ。

$3\vec{a} - 2\vec{b} = (5, 4)$

(1-3) 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を計算せよ。

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \times (-1) + 2 \times 1 = 1$

(1-4) ベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ のなす角を θ とするとき、$\cos\theta, \sin\theta, \tan\theta$ の値を求めよ。

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |a||b| \cos\theta$ より、$1 = \sqrt{5}\sqrt{2}\cos\theta$
よって、$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{10}}, \sin\theta = \frac{3}{\sqrt{10}}, \tan\theta = 3.$

(1-5) ベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ の線形結合でベクトル $\vec{x} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ を作る。このとき、$\vec{x} = 0$ ならば $\alpha = \beta = 0$ となることを示せ。

$\vec{x} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \alpha(1, 2) + \beta(-1, 1) = (\alpha - \beta, 2\alpha + \beta) = (0, 0)$ より、$\alpha - \beta = 0, 2\alpha + \beta = 0$ となる。これを解けば、$\alpha = \beta = 0$ を得る。

(1-6) $\vec{c} = (2, 4)$ とする。ベクトル $\vec{a}, \vec{c}$ の線形結合でベクトル $\vec{x} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{c}$ を作る。このとき、$\vec{x} = 0$ であっても必ずしも $\alpha = \beta = 0$ とはならないことを示せ。

$\alpha = -2, \beta = 1$ とすれば $\vec{x} = 0$ となる。

問題２

ベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ が、$|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3, |\vec{a} + \vec{b}| = 4$ を満たすとする。

(2-1) 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を計算せよ。

$$16 = |\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 13 + 2\vec{a} \cdot \vec{b}$$

したがって、$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3/2.$

(2-2) ベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ のなす角を θ とするとき、$\tan\theta$ の値を求めよ。

$\cos\theta = \dfrac{\frac{3}{2}}{2\times 3} = 1/4,\ \sin\theta = \frac{\sqrt{15}}{4},\ \tan\theta = \sqrt{15}.$

(2-3) $|\vec{a}-2\vec{b}|$ を計算せよ。

$$|\vec{a}-2\vec{b}|^2 = (\vec{a}-2\vec{b})\cdot(\vec{a}-2\vec{b}) = |\vec{a}|^2 + 4|\vec{b}|^2 - 4\vec{a}\cdot\vec{b} = 2^2 + 4\times 3^2 - 4\times\frac{3}{2} = 34$$

したがって、$|\vec{a}-2\vec{b}| = \sqrt{34}$

問題 3

ゼロでない 2 つのベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ に対し、$|\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}-\vec{b}|$ が成り立つとき、ベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ は直交することを示せ。

$0 = |\vec{a}+\vec{b}|^2 - |\vec{a}-\vec{b}|^2 = 4\vec{a}\cdot\vec{b}$

したがって、$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ よりベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ は直交する。

問題 4

3 次元空間に、点 P: $(2,-3,1)$ と、ベクトル $\vec{a} = (1,3,-2)$, $\vec{b} = (-3,1,-1)$ がある。

(4-1) 2 つのベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ に共に垂直なベクトルを一つ、求めよ。

求めるベクトルを $\vec{c} = (x,y,z)$ とおくと、$\vec{a}\cdot\vec{c} = \vec{b}\cdot\vec{c} = 0$ より、$x+3y-2z = -3x+y-z = 0$ を得る。これを解いて、$\vec{c} = (-1,7,10)$.

(4-2) 点 P を通り、ベクトル $\vec{a}$ に平行な直線の方程式を求めよ。

直線上の任意の点を Q: (x,y,z) とおくと、$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + t\vec{a}$ と書ける。ここで、t は任意の定数である。$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = (x,y,z)$, $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (2,-3,1)$ より、

$$\begin{aligned} x &= 2+t, \\ y &= -3+3t, \\ z &= 1-2t \end{aligned}$$

となる。これから t を消去すれば求める直線の式になる。t について解くと、$t = x-2 = \dfrac{y+3}{3} = -\dfrac{z-1}{2}$ なので、求める直線の式は、$x-2 = \dfrac{y+3}{3} = -\dfrac{z-1}{2}$ となる。

(4-3) 点 P を通り、ベクトル $\vec{a}$ に垂直な平面の方程式を求めよ。

求める平面上の任意の点を Q: (x,y,z) とおくと、ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ はこの平面内にあるので、ベクトル $\vec{a}$ と常に直交している。よって、$\vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = 0$ と書ける。ここで、$\vec{a} = (1,3,-2)$, $\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = (x-2, y+3, z-1)$ より、

$$0 = (x-2) + 3(y+3) - 2(z-1) = x+3y-2z+9$$

となる。よって、求める平面の式は、$x+3y-2z+9 = 0$ となる。