数学演習I　第5回　オイラーの公式

2014年5月14日

担当：佐藤 純

問題1

オイラーの公式 $e^{\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i}\sin x$ を使って、以下の式を証明せよ。

(1-1) $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$
$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$$\begin{aligned} e^{\mathrm{i}(\alpha+\beta)} &= e^{\mathrm{i}\alpha}e^{\mathrm{i}\beta} = (\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha)(\cos\beta + \mathrm{i}\sin\beta) \\ &= (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + \mathrm{i}(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta) \end{aligned} \tag{1}$$

一方、$e^{\mathrm{i}(\alpha+\beta)} = \cos(\alpha+\beta) + \mathrm{i}\sin(\alpha+\beta)$ なので、

$$\cos(\alpha+\beta) + \mathrm{i}\sin(\alpha+\beta) = (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + \mathrm{i}(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta) \tag{2}$$

である。これの実部と虚部を比べて与式を得る。

(1-2) $\cos nx + \mathrm{i}\sin nx = (\cos x + \mathrm{i}\sin x)^n$

$$\cos nx + \mathrm{i}\sin nx = e^{inx} = \left(e^{\mathrm{i}x}\right)^n = (\cos x + \mathrm{i}\sin x)^n \tag{3}$$

問題2

関数 $f(x)$ が、$f(x+y) = f(x)f(y)$ を満たすとする。

(2-1) $f(0) = 0$ とすると、全ての実数 x に対して $f(x) = 0$ となってしまうことを示せ。

$f(x+y) = f(x)f(y)$ において $y = 0$ とすると、$f(x) = f(x)f(0) = 0$ となり、これは任意の x に対して成り立つ。

(2-2) そこで、$f(0) \neq 0$ を仮定する。すると、$f(0) = 1$ となることを示せ。

$f(x+y) = f(x)f(y)$ において $x = y = 0$ とすると、$f(0) = f(0)f(0)$ となり、$f(0) \neq 0$ なので両辺を $f(0)$ で割れば、$f(0) = 1$ を得る。

(2-3) $f(x)f(-x) = 1$ を示せ。

$f(x+y) = f(x)f(y)$ において $y = -x$ とすれば、$f(x)f(-x) = f(0) = 1$ を得る。

問題3

三角関数は、指数関数を用いて

$$\cos x = \frac{e^{\mathrm{i}x} + e^{-\mathrm{i}x}}{2}, \qquad \sin x = \frac{e^{\mathrm{i}x} - e^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}$$

と表されることを示せ。

$e^{\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i}\sin x$, $e^{-\mathrm{i}x} = \cos x - \mathrm{i}\sin x$ より、$e^{\mathrm{i}x} + e^{-\mathrm{i}x} = 2\cos x$, $e^{\mathrm{i}x} - e^{-\mathrm{i}x} = 2\mathrm{i}\sin x$ なので、与式を得る。

問題 4

以下の複素数を、具体的に $a+\mathrm{i}b$, (a, b は実数) の形に表せ。

(4-1) $e^{2\pi\mathrm{i}} = 1$

(4-2) $e^{\pi\mathrm{i}} = -1$

(4-3) $e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \mathrm{i}$

(4-4) $e^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{2}} = -\mathrm{i}$

(4-5) $e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\mathrm{i}$

(4-6) $e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$

(4-7) $e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$

問題 5

3 次方程式 $x^3 = 1$ の解を求めたい。

(5-1) $x^3 - 1$ を因数分解して 2 次方程式の解の公式を用いることによって、3 つの複素数解を全て求めよ。

$0 = x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$ より、$x = 1$ または $x^2 + x + 1 = 0$ なので、$x = 1, \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$.

(5-2) $x^3 = 1 = e^{2\pi\mathrm{i}} = e^{4\pi\mathrm{i}} = e^{6\pi\mathrm{i}}$ より、$x = e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}, e^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}}, e^{2\pi\mathrm{i}}$ と解が求まる。これらを具体的に $a+\mathrm{i}b$, (a, b は実数) の形に表し、最初に求めた解と一致することを確かめよ。

$e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$,　$e^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}} = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$,　$e^{\mathrm{i}\frac{6\pi}{3}} = 1$,　となり、最初に求めた解と全て一致。

(5-3) 同様にして、8 次方程式 $x^8 = 1$ の 8 つの複素数解を全て求めよ。

$x^8 = 1 = e^{2n\pi\mathrm{i}}, n = 1, 2, \cdots, 8$ より、$x = e^{\mathrm{i}\frac{n\pi}{4}}, n = 1, 2, \cdots, 8$ なので、

$$x = \pm 1,\ \pm\mathrm{i},\ \frac{\pm 1 \pm \mathrm{i}}{\sqrt{2}} \tag{4}$$

を得る。