数学演習Ⅰ　第5回　オイラーの公式

2014年5月14日

担当：佐藤 純

問題 1

オイラーの公式 $e^{\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i}\sin x$ を使って、以下の式を証明せよ。

(1-1) $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$
$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

(1-2) $\cos nx + \mathrm{i}\sin nx = (\cos x + \mathrm{i}\sin x)^n$

問題 2

関数 $f(x)$ が、$f(x+y) = f(x)f(y)$ を満たすとする。

(2-1) $f(0) = 0$ とすると、全ての実数 x に対して $f(x) = 0$ となってしまうことを示せ。

(2-2) そこで、$f(0) \neq 0$ を仮定する。すると、$f(0) = 1$ となることを示せ。

(2-3) $f(x)f(-x) = 1$ を示せ。

問題 3

三角関数は、指数関数を用いて

$$\cos x = \frac{e^{\mathrm{i}x} + e^{-\mathrm{i}x}}{2}, \qquad \sin x = \frac{e^{\mathrm{i}x} - e^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}$$

と表されることを示せ。

問題 4

以下の複素数を、具体的に $a + \mathrm{i}b$, (a, b は実数) の形に表せ。

(4-1) $e^{2\pi\mathrm{i}}$

(4-2) $e^{\pi\mathrm{i}}$

(4-3) $e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$

(4-4) $e^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{2}}$

(4-5) $e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$

(4-6) $e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$

(4-7) $e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$

問題 5

3次方程式 $x^3 = 1$ の解を求めたい。

(5-1) $x^3 - 1$ を因数分解して2次方程式の解の公式を用いることによって、3つの複素数解を全て求めよ。

(5-2) $x^3 = 1 = e^{2\pi\mathrm{i}} = e^{4\pi\mathrm{i}} = e^{6\pi\mathrm{i}}$ より、$x = e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}, e^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}}, e^{2\pi\mathrm{i}}$ と解が求まる。これらを具体的に $a + \mathrm{i}b$, (a, b は実数) の形に表し、最初に求めた解と一致することを確かめよ。

(5-3) 同様にして、8次方程式 $x^8 = 1$ の8つの複素数解を全て求めよ。