

問題 1

以下の値を求めよ。

(1-1) $8^{2/3} = 4$

(1-2) $\left(3^{-\frac{5}{4}}\right)^{\frac{8}{5}} = 3^{-\frac{5}{4} \times \frac{8}{5}} = 3^{-2} = \frac{1}{9}$

(1-3)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{a}{x}\right)^{\frac{x}{a}} \right\}^a = e^a \quad (1)$$

ここで、ネイピア数の定義式

$$e = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \quad (2)$$

を使った。

(1-4) $\log_{10} 0.1 = -1$

(1-5) $\log_3 2 - \log_3 18 = \log_3 2 - \log_3(2 \times 3^2) = \log_3 2 - (\log_3 2 + 2 \log_3 3) = -2$

問題 2

(2-1) a, b, c を正の実数とし、 a, c は 1 でないとする。 $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ を証明せよ。

$x = \log_a b$ とすると、 $b = a^x$ である。両辺 \log_c をとると、 $\log_c b = \log_c a^x = x \log_c a$ なの
で、 $x = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ を得る。

(2-2) $\log_9 27$ を計算せよ。

$$\log_9 27 = \frac{\log_3 27}{\log_3 9} = \frac{3}{2}$$

問題 3

ドラえもんの道具に、栗饅頭の数 が 5 分で 2 倍になるバイバインという道具がある。

(3-1) 栗饅頭を直径 3cm の球、宇宙を直径 300 億光年の球とすると、宇宙の体積は栗饅頭の体積の何倍となるか？ただし、1 光年は 10 兆 km である。

宇宙の直径 = 300 億光年 = 3×10^{10} 光年 = $3 \times 10^{10} \times 10^{13}$ km = 3×10^{23} km = 3×10^{28} cm
なので、直径は 10^{28} 倍。よって、体積は、 $(10^{28})^3 = 10^{84}$ 倍。

(3-2) 最初に栗饅頭が一個あったとして、バイバインを使うとおよそどのくらいの時間の後に、栗饅頭の体積が宇宙の体積を超えるか？ただし、 $\log_{10} 2 = 0.3010 \dots$ を使ってよい。

n 回の分裂で宇宙体積を超えるとする、 $2^n = 10^{84}$ となる。両辺 \log_{10} を取ると、 $84 = \log_{10} 2^n = n \log_{10} 2 = 0.3010n$ 。よって、 $n = 84/0.3010 = 279$ となる。1 回の分裂に 5 分か
るので、 279×5 分 = 1395 分 = 約 24 時間。

問題 4

双曲線関数 $\cosh x$, $\sinh x$ を

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$
$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

で定義する。加法定理

$$\cosh(\alpha + \beta) = \cosh \alpha \cosh \beta + \sinh \alpha \sinh \beta$$
$$\sinh(\alpha + \beta) = \sinh \alpha \cosh \beta + \cosh \alpha \sinh \beta$$

を示せ。

$$\begin{aligned} (\text{右辺}) &= \cosh \alpha \cosh \beta + \sinh \alpha \sinh \beta \\ &= \frac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{2} \frac{e^\beta + e^{-\beta}}{2} + \frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{2} \frac{e^\beta - e^{-\beta}}{2} \\ &= \frac{e^{\alpha+\beta} + e^{\alpha-\beta} + e^{-\alpha+\beta} + e^{-\alpha-\beta}}{4} + \frac{e^{\alpha+\beta} - e^{\alpha-\beta} - e^{-\alpha+\beta} + e^{-\alpha-\beta}}{4} \\ &= \frac{e^{\alpha+\beta} + e^{-\alpha-\beta}}{2} = \cosh(\alpha + \beta) = (\text{左辺}) \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} (\text{右辺}) &= \sinh \alpha \cosh \beta + \cosh \alpha \sinh \beta \\ &= \frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{2} \frac{e^\beta + e^{-\beta}}{2} + \frac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{2} \frac{e^\beta - e^{-\beta}}{2} \\ &= \frac{e^{\alpha+\beta} + e^{\alpha-\beta} - e^{-\alpha+\beta} - e^{-\alpha-\beta}}{4} + \frac{e^{\alpha+\beta} - e^{\alpha-\beta} + e^{-\alpha+\beta} - e^{-\alpha-\beta}}{4} \\ &= \frac{e^{\alpha+\beta} - e^{-\alpha-\beta}}{2} = \sinh(\alpha + \beta) = (\text{左辺}) \end{aligned} \tag{4}$$