数学演習I　第3回　三角関数

2014年4月23日

担当：佐藤 純

問題1

以下の値を求めよ。

(1-1) $\sin^{-1}\dfrac{1}{2} = \dfrac{\pi}{6}$

(1-2) $\cos^{-1}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{5\pi}{6}$

(1-3) $\tan^{-1}(-1) = -\dfrac{\pi}{4}$

問題2

次の極限値を求めよ。

(2-1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x} = \lim_{x\to 0} 4\frac{\sin 4x}{4x} = 4\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x} = 4$

(2-2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 2x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{3}{2}\frac{\sin 3x}{3x}\frac{2x}{\sin 2x}\right) = \frac{3}{2}\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin 2x}\right) = \frac{3}{2}\times 1\times 1 = \frac{3}{2}$

(2-3)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\sin x} &= \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x\sin x(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x\sin x(1+\cos x)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\frac{1}{1+\cos x} = \frac{1}{2} \qquad (1)\end{aligned}$$

(2-4) $\displaystyle\lim_{x\to \pi}\frac{\sin 3x}{\sin 2x}$

$x = y + \pi$ とおくと、$x\to\pi$ のとき、$y\to 0$ なので、

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin 3x}{\sin 2x} = \lim_{y\to 0}\frac{\sin 3(y+\pi)}{\sin 2(y+\pi)} = -\lim_{y\to 0}\frac{\sin 3y}{\sin 2y} = -\frac{3}{2} \qquad (2)$$

(2-5) $\displaystyle\lim_{x\to \pi/2}\frac{x-\pi/2}{\cos x}$

$x = y + \pi/2$ とおくと、$x\to\pi/2$ のとき、$y\to 0$ なので、

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{x-\pi/2}{\cos x} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\cos(y+\pi/2)} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{-\sin y} = -1 \qquad (3)$$

ここで、極限値

$$\frac{\sin x}{x} = 1 \qquad (4)$$

を使った。

$\boxed{\textbf{問題 3}}$

(3-1) 関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ の定義式を書け。

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

(3-2) $f(x) = \sin x$ の導関数を、上の定義式にしたがって計算せよ。

$$\begin{aligned}
(\sin x)' &= \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} \\
&= \sin x \lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h}
\end{aligned} \tag{5}$$

ここで、

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{(\cos h - 1)(\cos h + 1)}{h(\cos h + 1)} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\cos^2 h - 1}{h(\cos h + 1)} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{-\sin^2 h}{h(\cos h + 1)} \\
&= -\left(\lim_{h \to 0} \sin h\right)\left(\lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h}\right)\left(\lim_{h \to 0} \frac{1}{\cos h + 1}\right) \\
&= -0 \times 1 \times \frac{1}{2} = 0
\end{aligned} \tag{6}$$

より、

$$(\sin x)' = \cos x \tag{7}$$

(3-3) $f(x) = \cos x$ の導関数を、上の定義式にしたがって計算せよ。

$$\begin{aligned}
(\cos x)' &= \lim_{h \to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h} \\
&= \cos x \lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} - \sin x \lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h}
\end{aligned} \tag{8}$$

ここで、

$$\lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0 \tag{9}$$

より、

$$(\cos x)' = -\sin x \tag{10}$$