

一般力学演習 第1回 運動のベクトル表示

2013年9月20日

担当：佐藤 純

問題 1

2次元平面内を等速円運動する物体を考える。円運動の半径を ρ , 角速度を ω とする。

(1-1) 原点 $(0, 0)$ を中心に左回りに回転するとし、時刻 $t = 0$ において物体は $(\rho, 0)$ にあるとする。時刻 t における位置ベクトル $\mathbf{r}(t)$, 速度ベクトル $\mathbf{v}(t)$, 加速度ベクトル $\mathbf{a}(t)$ を求めよ。

(1-2) 位置ベクトルと速度ベクトルは常に直交していることを示せ。

(1-3) 加速度ベクトルは、常に物体から原点に向かう向きにあることを示せ。

(1-4) $\mathbf{r} \cdot \mathbf{a} = -|\mathbf{v}|^2$ を示せ。

問題 2

2次元極座標を考える。基本ベクトルを $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta$ とする。

(2-1) $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta$ を直交座標の基本ベクトル $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ を用いて表せ。

(2-2) 基本ベクトルの時間微分 $\dot{\mathbf{e}}_r, \dot{\mathbf{e}}_\theta$ を計算し、それぞれ $\mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_r$ に比例していることを示せ。

(2-3) 物体の位置ベクトルを \mathbf{r} とする。物体の速度ベクトル $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ は、極座標を用いると

$$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta \quad (1)$$

と書けることを示せ。

(2-4) 同様に、物体の加速度ベクトル $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}}$ は、極座標を用いると

$$\mathbf{a} = \{\ddot{r} - r(\dot{\theta})^2\}\mathbf{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\mathbf{e}_\theta \quad (2)$$

と書けることを示せ。

(2-5) 角速度 ω の等速円運動の場合に具体的に \mathbf{v}, \mathbf{a} を計算し、問題 (1-2) ~ (1-4) の事実を確認せよ。