数学II　中間試験

2013年11月19日

担当：佐藤 純

問題1 ⋆　(4点 ×8=32点)

以下の不定積分、および定積分を計算せよ。

(1) $\displaystyle\int(3x^2+4x+5)\mathrm{d}x = x^3+2x^2+5x+C$

(2) $\displaystyle\int\left(\frac{1}{x^2}+\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x = -\frac{1}{x}+\frac{2}{3}x\sqrt{x}+2\sqrt{x}+C$

(3) $\displaystyle\int e^{-3x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}e^{-3x}+C$

(4) $\displaystyle\int(3x^2+4x)(x^3+2x^2+1)^4\,\mathrm{d}x$

$\displaystyle= \int(x^3+2x^2+1)'(x^3+2x^2+1)^4\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}(x^3+2x^2+1)^5+C$

(5) $\displaystyle\int x\cos x\,\mathrm{d}x = \int x(\sin x)'\,\mathrm{d}x = x\sin x - \int(x)'\sin x\,\mathrm{d}x = x\sin x - \int\sin x\mathrm{d}x$

$= x\sin x + \cos x + C$

(6) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x(x+1)} = \int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x = \log|x|-\log|x+1|+C = \log\left|\frac{x}{x+1}\right|+C$

(7) $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty x(-e^{-x})'\,\mathrm{d}x = \Big[x(-e^{-x})\Big]_0^\infty - \int_0^\infty(x)'(-e^{-x})\,\mathrm{d}x$

$\displaystyle= -\Big[xe^{-x}\Big]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x}\,\mathrm{d}x = -\Big[xe^{-x}\Big]_0^\infty - \Big[e^{-x}\Big]_0^\infty = -(0-0)-(0-1) = 1$

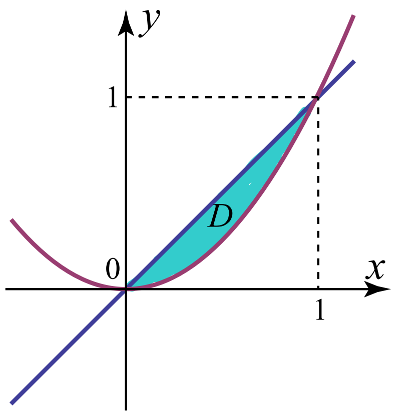
(8)

$$
\begin{aligned}
\int_2^\infty\frac{\mathrm{d}x}{x(x-1)} &= \int_2^\infty\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x\\
&= \Big[\log|x-1|-\log|x|\Big]_2^\infty\\
&= \left[\log\left|\frac{x-1}{x}\right|\right]_2^\infty\\
&= \left(\lim_{x\to\infty}\log\left|\frac{x-1}{x}\right|\right)-\log\left|\frac{2-1}{2}\right|\\
&= \left(\log\left|\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x}\right|\right)-\log\frac{1}{2}\\
&= \left(\log\left|\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x}}{1}\right|\right)-\log\frac{1}{2}\\
&= \left(\log\left|\frac{1-0}{1}\right|\right)-\log\frac{1}{2}\\
&= \log 1-\log\frac{1}{2}\\
&= \log 2
\end{aligned}
$$

$\boxed{\textbf{問題 2}}$ ⋆　　(3 点+5 点+5 点=13 点)

直線 $y = x$ と、放物線 $y = x^2$ で囲まれる領域を D とする。

(2-1) 領域 D を xy 平面に図示せよ。



(2-2) 領域 D の面積を求めよ。

$$S = \int_0^1 (y_2 - y_1)\mathrm{d}x = \int_0^1 (x - x^2)\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

(2-3) 領域 D を x 軸の周りに回転させてできる立体の体積を求めよ。

$$V = \int_0^1 (\pi y_2^2 - \pi y_1^2)\mathrm{d}x = \int_0^1 (\pi x^2 - \pi x^4)\mathrm{d}x = \pi\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5\right]_0^1 = \pi\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = \frac{2}{15}\pi$$

$\boxed{\textbf{問題 3}}$ ⋆　　(5 点 ×3=15 点)

以下の微分方程式を、与えられた初期条件のもとに解け。

(3-1) $y' = 2y$　　$(x, y) = (0, 3)$

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2y,\\
&\frac{\mathrm{d}y}{y} = 2\mathrm{d}x,\\
&\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = 2\int \mathrm{d}x,\\
&\log|y| = 2x + C,\\
&|y| = e^{2x+C} = e^C e^{2x},\\
&y = \pm e^C e^{2x}.
\end{aligned}$$

ここで、$\pm e^C = A$ とおくと、$y = Ae^{2x}$ となる。初期条件より、$x = 0$ のとき $y = 2$ なので、$A = 3$ である。よって、$y = 3e^{2x}$ を得る。

(3-2) $y' = y^2x^2 \qquad\qquad (x,y) = (0,1)$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y^2x^2, \\
&\frac{\mathrm{d}y}{y^2} = x^2\mathrm{d}x, \\
&\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2} = \int x^2\mathrm{d}x, \\
&-\frac{1}{y} = \frac{1}{3}x^3 + C.
\end{aligned}
$$

初期条件より、$x = 0$ のとき $y = 1$ なので、$C = -1$ である。よって、

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{y} = \frac{1}{3}x^3 - 1 = \frac{x^3-3}{3}, \\
&y = \frac{3}{3-x^3}
\end{aligned}
$$

を得る。

(3-3) $y' - 3y = e^{2x} \qquad\qquad (x,y) = (0,0)$

右辺をゼロにおいた、斉次方程式 $y' - 3y = 0$ をまず解く。これは変数分離形なので、

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3y, \\
&\frac{\mathrm{d}y}{y} = 3\mathrm{d}x, \\
&\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int 3\mathrm{d}x, \\
&\log|y| = 3x + C, \\
&y = Ae^{3x}
\end{aligned}
$$

と解ける。ここで、A は積分定数であるが、x の関数 $A(x)$ であるとみなして (定数変化法)、もとの微分方程式に代入すると、

$$
\begin{aligned}
&A'e^{3x} + 3Ae^{3x} - 3Ae^{3x} = e^{2x}, \\
&A' = e^{-x}
\end{aligned}
$$

と A に対する微分方程式が得られる。これを積分して

$$
A = -e^{-x} + C
$$

と A が求まる。これを $y = Ae^{3x}$ に代入して、$y = Ce^{3x} - e^{2x}$ を得る。初期条件より $C = 1$ なので、

$$
y = e^{3x} - e^{2x}
$$

となる。

問題 4 $\star$ 　(5 点 ×2=10 点)

以下の微分方程式の一般解を求めよ。

(4-1) $y'' + y = 0$

指数関数型の解 $y = e^{\lambda x}$ を仮定する。これを微分すると $y' = \lambda e^{\lambda x}$, $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$ となる。これを微分方程式に代入すると、

$$\begin{aligned}
&\lambda^2 e^{\lambda x} + e^{\lambda x} = 0, \\
&e^{\lambda x}(\lambda^2 + 1) = 0, \\
&\lambda^2 + 1 = 0, \\
&\lambda = \pm \mathrm{i}
\end{aligned}$$

を得る。ここで、$e^{\lambda x} > 0$ であることを使った。

これを $y = e^{\lambda x}$ に代入して、２つの独立解 $y = e^{\mathrm{i}x}$, $y = e^{-\mathrm{i}x}$ を得る。よって、この微分方程式の一般解は

$$y = Ae^{\mathrm{i}x} + Be^{-\mathrm{i}x} \quad (A, B \text{ は積分定数}) \tag{1}$$

となる。

あるいは、指数関数をオイラーの公式を使って三角関数に直すと、

$$\begin{aligned}
y &= Ae^{\mathrm{i}x} + Be^{-\mathrm{i}x} \\
&= A(\cos x + \mathrm{i}\sin x) + B(\cos x - \mathrm{i}\sin x) \\
&= (A + B)\cos x + \mathrm{i}(A - B)\sin x \\
&= C\cos x + D\sin x \quad (C, D \text{ は積分定数})
\end{aligned} \tag{2}$$

となる。ただし、$C = A + B$, $D = \mathrm{i}(A - B)$ とおいた。

(4-2) $y'' + 2y' - 8y = 0$

指数関数型の解 $y = e^{\lambda x}$ を仮定する。これを微分すると $y' = \lambda e^{\lambda x}$, $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$ となる。これを微分方程式に代入すると、

$$\begin{aligned}
&\lambda^2 e^{\lambda x} + 2\lambda e^{\lambda x} - 8e^{\lambda x} = 0, \\
&e^{\lambda x}(\lambda^2 + 2\lambda - 8) = 0, \\
&\lambda^2 + 2\lambda - 8 = 0, \\
&(\lambda + 4)(\lambda - 2) = 0, \\
&\lambda = 2, -4
\end{aligned}$$

を得る。ここで、$e^{\lambda x} > 0$ であることを使った。

これを $y = e^{\lambda x}$ に代入して、２つの独立解 $y = e^{2x}$, $y = e^{-4x}$ を得る。よって、この微分方程式の一般解は

$$y = Ae^{2x} + Be^{-4x} \quad (A, B \text{ は積分定数})$$

となる。

$\boxed{\textbf{問題 5}}$ ⋆⋆　(5 点 ×2=10 点)

被積分関数が、積分範囲の右端 $x=3$ で発散することに注意して、以下の広義積分の収束, 発散を調べ、収束する場合にはその値を求めよ。

(5-1) $\displaystyle\int_0^3 \frac{\mathrm{d}x}{(3-x)^2}$

$$
\begin{aligned}
\int_0^3 \frac{\mathrm{d}x}{(3-x)^2} &= \lim_{\epsilon\to+0}\int_0^{3-\epsilon} \frac{\mathrm{d}x}{(3-x)^2} \\
&= \lim_{\epsilon\to+0}\left[\frac{1}{3-x}\right]_0^{3-\epsilon} \\
&= \lim_{\epsilon\to+0}\frac{1}{\epsilon}-\frac{1}{3} \\
&= +\infty
\end{aligned}
$$

より、この広義積分は発散する。

(5-2) $\displaystyle\int_0^3 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3-x}}$

$$
\begin{aligned}
\int_0^3 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3-x}} &= \lim_{\epsilon\to+0}\int_0^{3-\epsilon} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3-x}} \\
&= \lim_{\epsilon\to+0}\left[-2\sqrt{3-x}\right]_0^{3-\epsilon} \\
&= \lim_{\epsilon\to+0}(-2\sqrt{\epsilon})+2\sqrt{3} \\
&= 2\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

より、この広義積分は収束し、その値は $2\sqrt{3}$ である。

$\boxed{\textbf{問題 6}}$ ⋆⋆　(5 点 ×3=15 点)

(6-1) xy 平面をボールが運動している。時刻 t におけるボールの位置が $x=t-\sin t$, $y=1-\cos t$ で与えられるとき、時刻 $0<t<2\pi$ の間にボールが描く軌跡の全長を求めよ。

$$
\begin{aligned}
L &= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}t\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2} \\
&= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}t\sqrt{(1-\cos t)^2+(\sin t)^2} \\
&= \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}t\sqrt{1-\cos t} \\
&= \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}t\sqrt{2\sin^2\frac{t}{2}} \\
&= 2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}t\sin\frac{t}{2} \\
&= 4\left[-\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} \\
&= 8
\end{aligned}
$$

(6-2) 極方程式 $r = e^{\theta}\,(0 < \theta < \pi/2)$ で表される曲線と、x 軸、y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

$$
\begin{aligned}
S &= \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\theta \frac{1}{2} r^2 \\
&= \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\theta \frac{1}{2} e^{2\theta} \\
&= \left[\frac{1}{4} e^{2\theta} \right]_0^{\pi/2} \\
&= \frac{1}{4}(e^{\pi} - 1)
\end{aligned}
$$

(6-3) 半径 r の球の体積 V を求めよ。

高さ z における球の断面積 $f(z)$ は、

$$
f(z) = \pi(r^2 - z^2)
$$

で与えられるので、体積 V は

$$
\begin{aligned}
V &= \int_{-r}^{r} \mathrm{d}z f(z) \\
&= \pi \int_{-r}^{r} \mathrm{d}z (r^2 - z^2) \\
&= \pi \left[r^2 z - \frac{1}{3} z^3 \right]_{-r}^{r} \\
&= \frac{4}{3} \pi r^3.
\end{aligned}
$$

となる。

問題 7 ⋆⋆⋆　(5 点)

定積分 $\displaystyle\int_1^{e^{\pi}} \sin(\log x)\mathrm{d}x$ の値を求めよ。

計算が優雅で労力が少ない順に、3 つ解法を示す。

(解法 1)：オイラーの公式

オイラーの公式 $e^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$ より、$\sin\theta = \mathrm{Im} e^{\mathrm{i}\theta}$ なので、

$$
\int_1^{e^{\pi}} \sin(\log x)\mathrm{d}x = \mathrm{Im} \int_1^{e^{\pi}} e^{\mathrm{i}\log x}\mathrm{d}x
$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathrm{Im}\int_1^{e^\pi} x^{\mathrm{i}}\mathrm{d}x \\
&= \mathrm{Im}\left[\frac{1}{\mathrm{i}+1}x^{\mathrm{i}+1}\right]_1^{e^\pi} \\
&= -\mathrm{Im}\frac{1}{\mathrm{i}+1}(e^\pi+1) \\
&= \frac{e^\pi+1}{2}
\end{aligned}
$$

(解法 2)：部分積分

$$
\begin{aligned}
I = \int_1^{e^\pi} \sin(\log x)\mathrm{d}x &= \int_1^{e^\pi} (x)'\sin(\log x)\mathrm{d}x \\
&= [x\sin(\log x)]_1^{e^\pi} - \int_1^{e^\pi} x\{\sin(\log x)\}'\mathrm{d}x \\
&= (e^\pi \sin\pi - \sin 0) - \int_1^{e^\pi} x\{\cos(\log x)\}(\log x)'\mathrm{d}x \\
&= (0-0) - \int_1^{e^\pi} x\{\cos(\log x)\}\frac{1}{x}\mathrm{d}x \\
&= -\int_1^{e^\pi} \cos(\log x)\mathrm{d}x \\
&= -\int_1^{e^\pi} (x)'\cos(\log x)\mathrm{d}x \\
&= -\left[x\cos(\log x)\right]_1^{e^\pi} + \int_1^{e^\pi} \{\cos(\log x)\}'\mathrm{d}x \\
&= -(e^\pi\cos\pi - \cos 0) - \int_1^{e^\pi} \sin(\log x)\mathrm{d}x \\
&= e^\pi + 1 - I
\end{aligned}
$$

より、$I = \dfrac{e^\pi+1}{2}$ を得る。

(解法 3)：置換積分

$t = \log x$ とおくと、$x = 1 \to e^\pi$ で $t = 0 \to \pi$ であり、$\mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}x}{x}$ より $\mathrm{d}x = x\mathrm{d}t = e^t\mathrm{d}t$ なので、

$$
\begin{aligned}
I = \int_1^{e^\pi} \sin(\log x)\mathrm{d}x &= \int_0^\pi e^t\sin t\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\pi (e^t)'\sin t\mathrm{d}t \\
&= [e^t\sin t]_0^\pi - \int_0^\pi e^t\cos t\mathrm{d}t \\
&= -[e^t\cos t]_0^\pi - \int_0^\pi e^t\sin t\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

$$= e^{\pi} + 1 - I$$

より、$I = \dfrac{e^{\pi}+1}{2}$ を得る。

$\boxed{\textbf{問題 8}}$ $\star\star\star$　　(3 点+7 点=10 点)

定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x)\mathrm{d}x$ の値を求めたい。

(8-1) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(\cos x)\mathrm{d}x$ を示せ。

$\sin x$ を $\cos x$ に換えたいので、$\cos t = \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$ に注意すれば、$x = \frac{\pi}{2} - t$ と置換すればよいことに気付く。$x = \frac{\pi}{4} \to \frac{\pi}{2}$ で $t = \frac{\pi}{4} \to 0$ であり、$\mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$ なので、

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x)\mathrm{d}x &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{0} \log\left\{\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right\}(-\mathrm{d}t) \\
&= -\int_{\frac{\pi}{4}}^{0} \log(\cos t)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(\cos t)\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

となる。

(8-2) 上で示した式をヒントに、定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x)\mathrm{d}x$ の値を求めよ。

$$\begin{aligned}
I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x)\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(\sin x)\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(\sin x)\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(\cos x)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \{\log(\sin x) + \log(\cos x)\}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(\sin x\cos x)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \{\log(\sin 2x) - \log 2\}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(\sin 2x)\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log 2\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

ここで、$t = 2x$ とすれば、$x = 0 \to \frac{\pi}{4}$ で $t = 0 \to \frac{\pi}{2}$ であり、$\mathrm{d}t = 2\mathrm{d}x$ なので、

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(\sin 2x)\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log 2\mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin t)\frac{\mathrm{d}t}{2} - \frac{\pi}{4}\log 2 \\
&= \frac{1}{2}I - \frac{\pi}{4}\log 2
\end{aligned}
$$

となるので、$I = \frac{1}{2}I - \frac{\pi}{4}\log 2$ より $\frac{1}{2}I = -\frac{\pi}{4}\log 2$ なので

$$
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x)\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{2}\log 2
$$

を得る。

問題 9 ⋆⋆⋆ (3 点+7 点=10 点)

定積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ の値を求めたい。

(9-1) 収束因子 e^{-ax} を導入し、a の関数 $f(a) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-ax}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ を考える。$f'(a)$ を計算せよ。

e^{-ax} を a で微分すると $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}e^{-ax} = -xe^{-ax}$ となることに注意すれば、

$$
\begin{aligned}
f'(a) &= \int_0^\infty (-x)e^{-ax}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x \\
&= -\int_0^\infty e^{-ax}\sin x\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

となり、これは普通に部分積分で計算できる：

$$
\begin{aligned}
I = \int_0^\infty e^{-ax}\sin x\mathrm{d}x &= \int_0^\infty e^{-ax}(-\cos x)'\mathrm{d}x \\
&= \left[e^{-ax}(-\cos x)\right]_0^\infty - a\int_0^\infty e^{-ax}\cos x\mathrm{d}x \\
&= 1 - a\left[e^{-ax}\sin x\right]_0^\infty - a^2\int_0^\infty e^{-ax}\sin x\mathrm{d}x \\
&= 1 - a^2 I
\end{aligned}
$$

より、$I = \dfrac{1}{1+a^2}$ を得る。

あるいは、オイラーの公式を使えばもっと簡単に、

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-ax}\sin x\mathrm{d}x &= \mathrm{Im}\int_0^\infty e^{-ax}e^{\mathrm{i}x}\mathrm{d}x \\
&= \mathrm{Im}\left[\frac{1}{\mathrm{i}-a}e^{(\mathrm{i}-a)x}\right]_0^\infty \\
&= -\mathrm{Im}\frac{1}{\mathrm{i}-a} \\
&= \frac{1}{1+a^2}
\end{aligned}
$$

を得る。

(9-2) 上の計算結果をヒントに、定積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ の値を求めよ。

$f'(a) = -\dfrac{1}{1+a^2}$ より、これを積分して、

$$f(a) = -\int \frac{1}{1+a^2}\mathrm{d}a = -\tan^{-1} a + C$$

を得る。ここで、C は積分定数である。ここで、$f(a \to +\infty) = -\frac{\pi}{2} + C = 0$ より、$C = \frac{\pi}{2}$ である。したがって、

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = f(a \to +0) = \frac{\pi}{2}$$

となる。